高エネルギー宇宙物理学のための ROOT 入門

– 第 2 回 –

奥村 曉

名古屋大学 宇宙地球環境研究所

2017 年 4 月 27 日

名古屋大学 NAGOYA UNIVERSITY

ISEE Institute for Space-Earth Environmental Research

oxon@mac.com

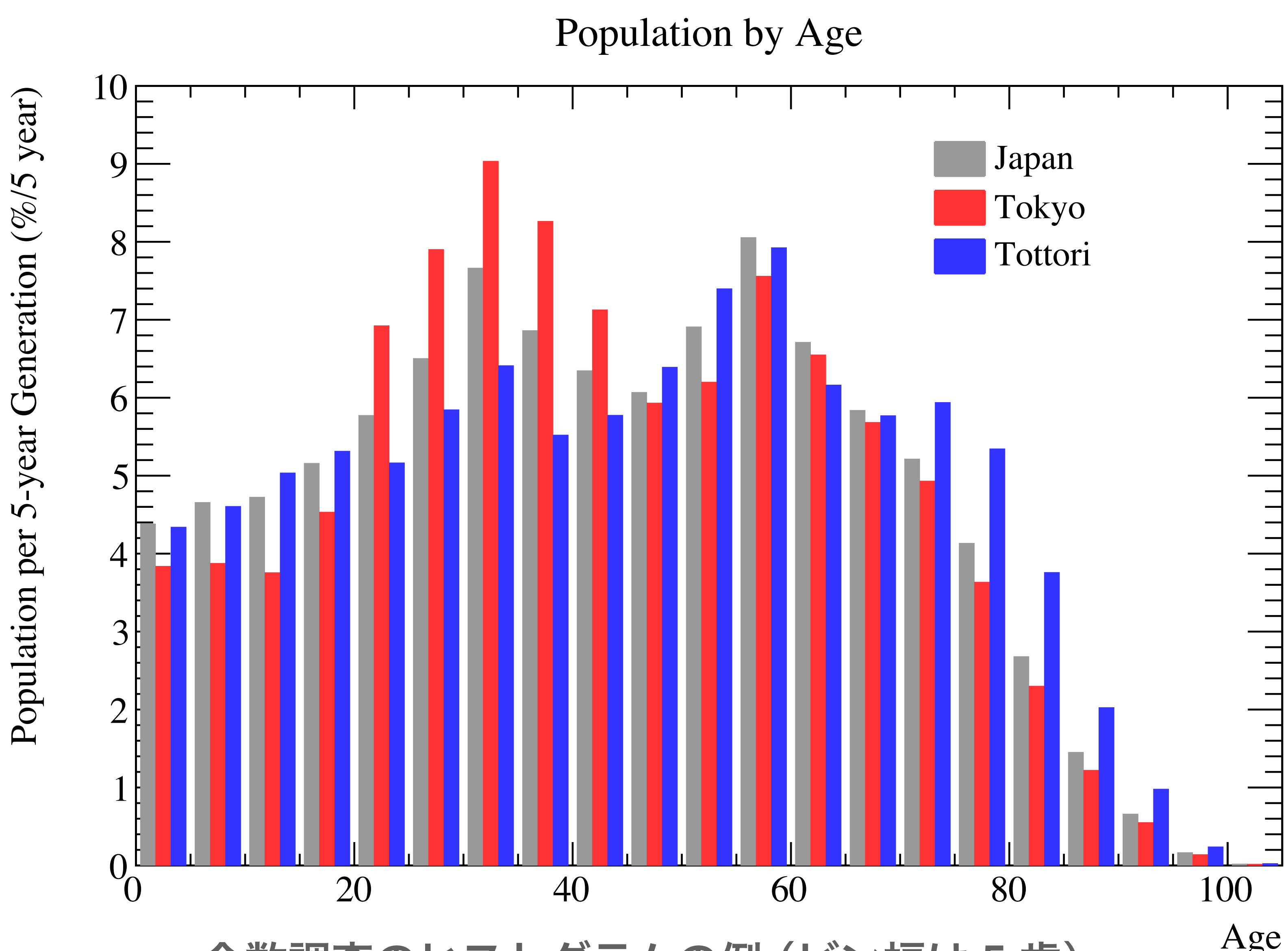
前回の補足

前回の補足

- 講習会の時間は 18:30 を回ることも、早く終わることもあり得ます
- 運営・進行に関することも質問してください
- RHEA_v4.pdf を公開したので、予習・復習、細かいところの理解に使ってください（ただし空白多し）
- RHEA の repository を clone しておいてください
- 前回質問少なすぎ
- PDF からコピペするときは、長い行の途中で改行が入るので注意

ヒストグラム

ヒストグラム（histogram）とはなにか？



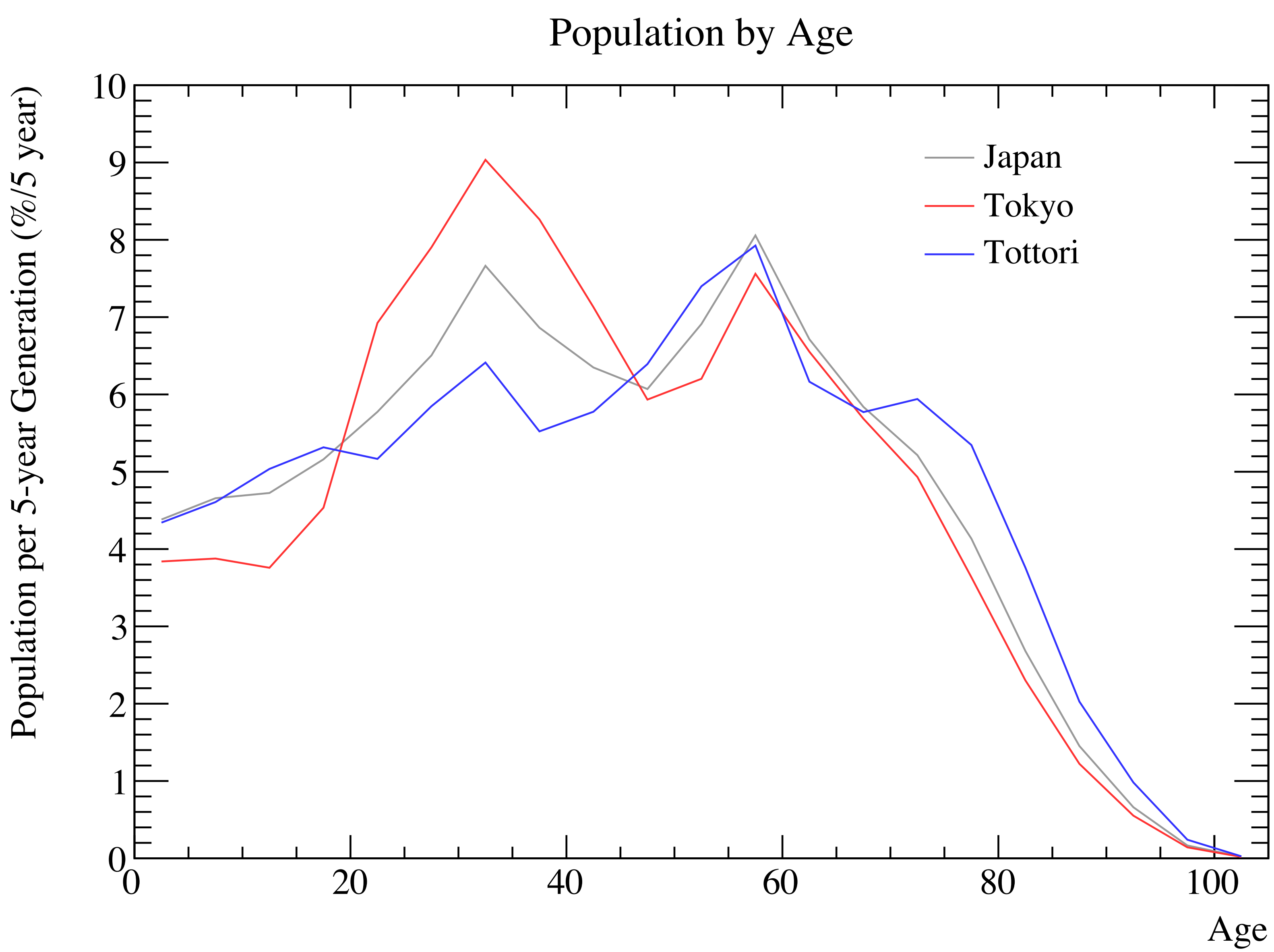
全数調査のヒストグラムの例（ビン幅は 5 歳）
（データ出典：国勢調査 2005）

- 度数分布図
- ある物理量がどのように分布しているかを、値の範囲を**ビン**（bin）に区切って表示したもの
- 実験での使用例
  - 光検出器の波高分布（ポアソン分布と正規分布）
  - 崩壊時間や飛程の分布（指数分布）
- 分布同士の比較、理論曲線との比較によく使われる

大事なこと

- 積分すると総数になる
  - 標本の大きさ（sample size）
    - 総測定回数や総発生事象（トリガーした宇宙線粒子のエネルギー分布など）
    - 全数測定の総数（国勢調査、実験装置の全数調査など）
    - 標本数（number of samples）とは言わないので注意
  - 確率密度関数の場合は 100% や 1
    - 十分に標本が大きい（=統計誤差の小さい）MC シミュレーションで得られた物理量の分布や理論曲線など
- 面積に意味があるので原則として縦軸のゼロを表示する（対数表示の場合はもちろん不可能）
- 全数調査と標本調査は分布が異なる

間違った表示の例



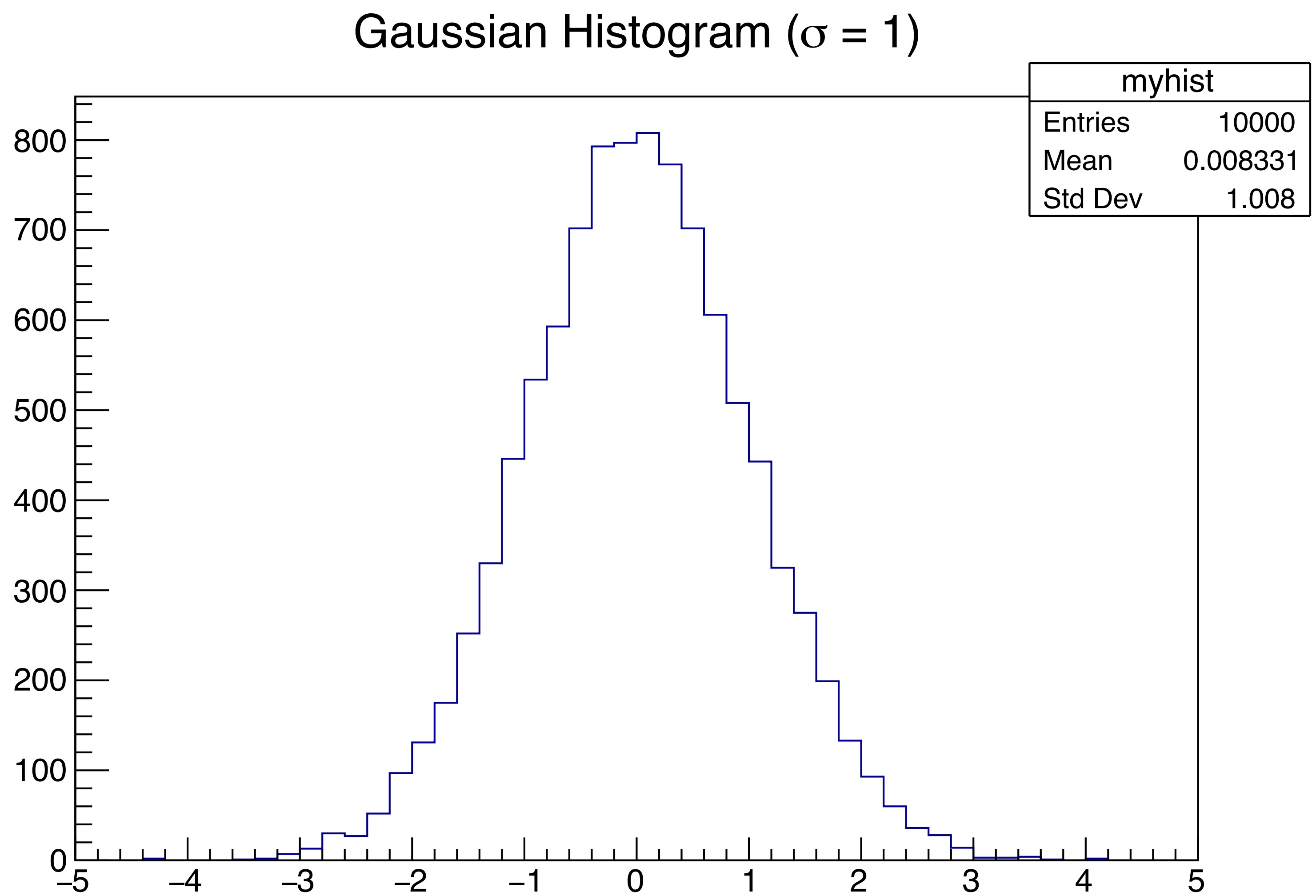
- ヒストグラムを折れ線グラフにしない
  - ビンの中心値はそのビンの代表値ではない
  - 面積が保存しない
  - （多くの場合）折れ線の傾きに物理的な意味がない
  - 誤差棒が大きい場合、傾きを見せるのは読者の誤解を誘発する

１次元ヒストグラム

TH1 クラス

- ROOT の 1 次元ヒストグラムは TH1 というクラス
- ヒストグラムの縦軸のデータ型に応じて複数の派生クラスがある
  - **TH1D** – double（14 桁まで扱える、多分一番よく使う）
  - TH1F – float（7 桁）
  - TH1C – char（-128 – 127）
  - TH1S - 16 bit int（short）（-32768 – 32767）
  - TH1I – 32 bit int（-2147483648 – 2147483647）
- TH1D 以外はひとまず忘れて良い

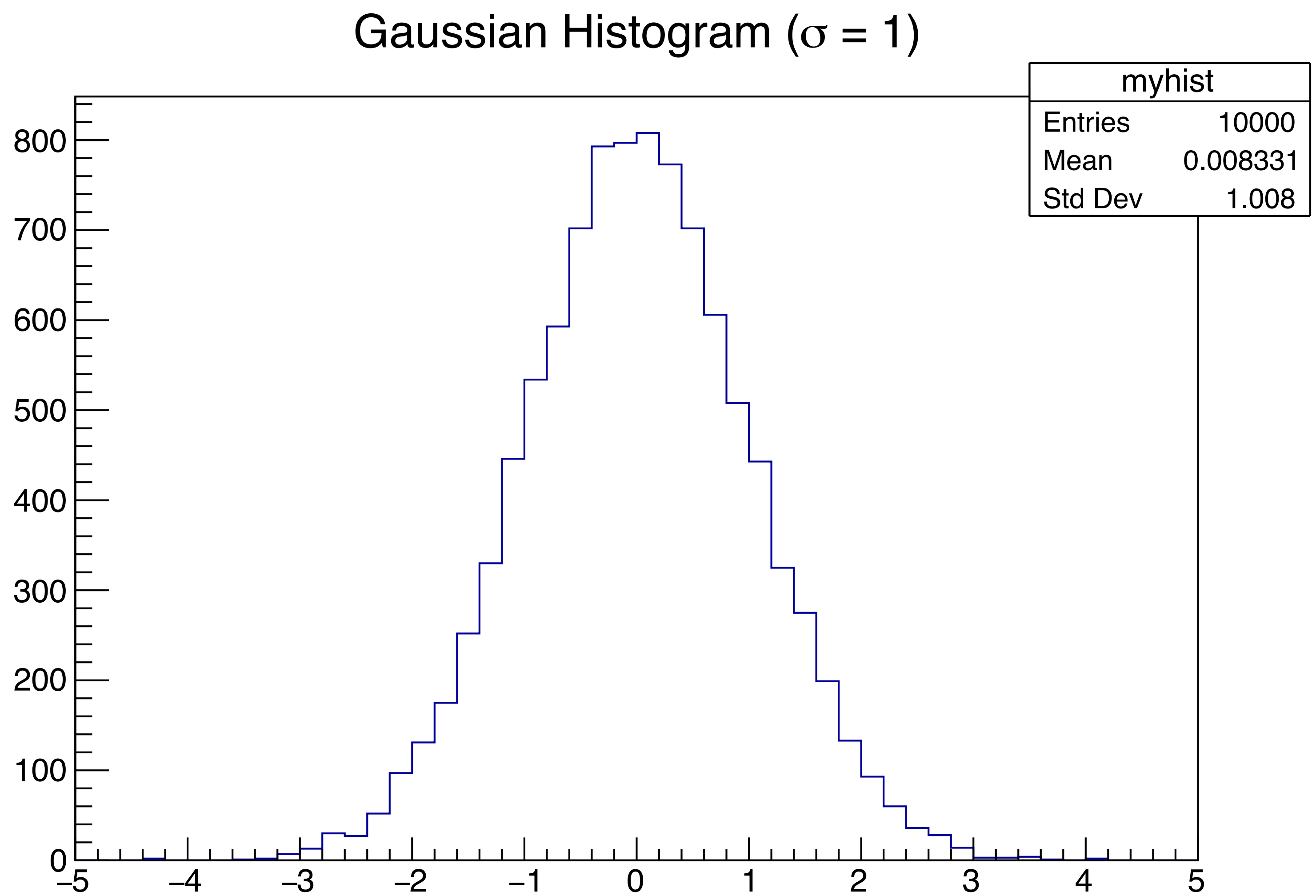
前回の復習




```
$ root
root [0] TH1D* hist
            = new TH1D("myhist",
                       "Gaussian Histogram (#sigma = 1)",
                       50,
                       -5,
                       5)
root [1] hist->FillRandom("gaus", 10000)
root [2] hist->Draw()
```

❶ 名前（なくてもよい）
❷ タイトル（なくてもよい）
❸ ビン数
❹ 下限値
❺ 上限値
❻ 標準偏差 1 の正規分布を乱数で 10^4 回詰める

自分で 10^4 回詰める

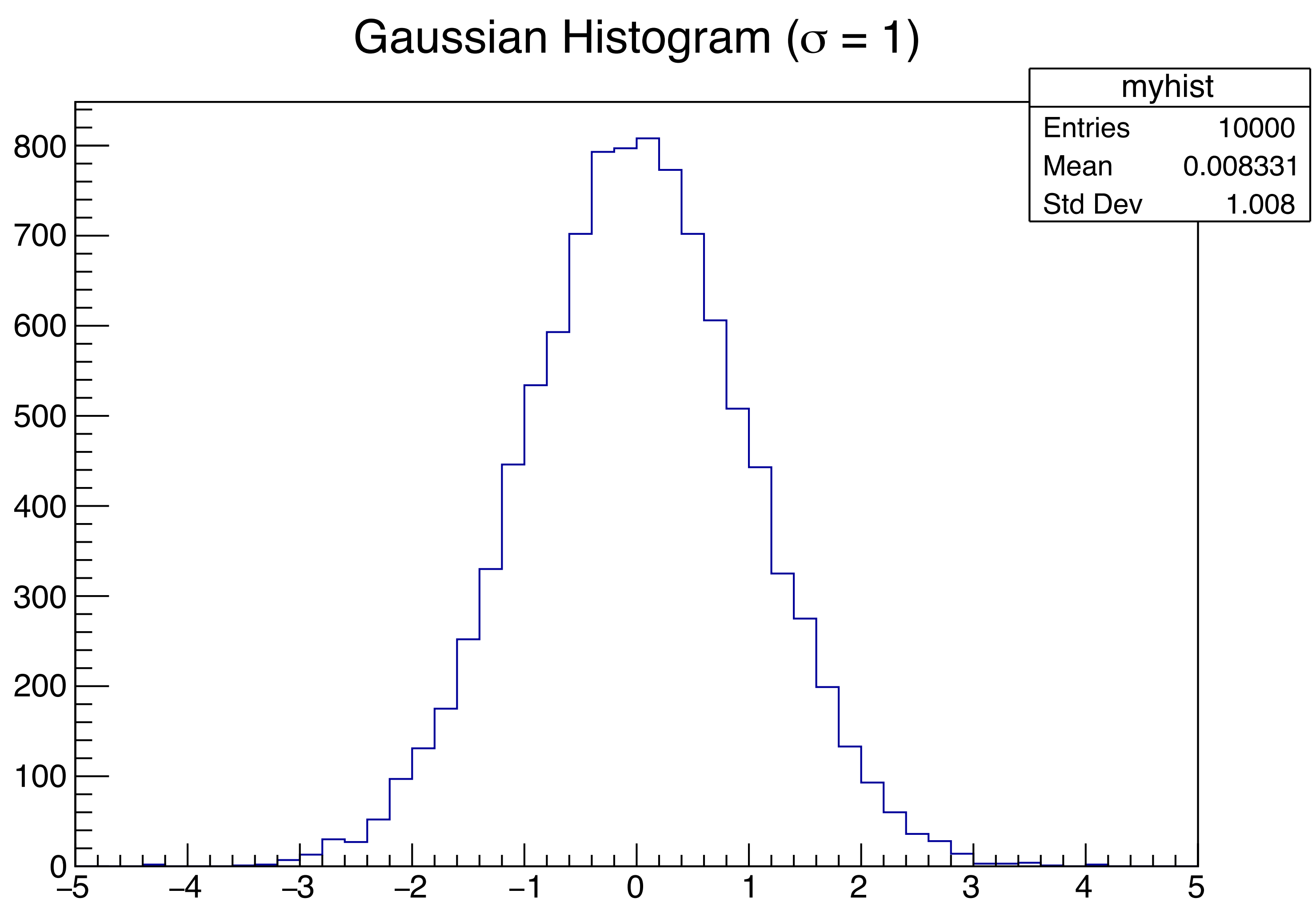



```
$ root
root [0] TH1D* hist = new TH1D("myhist", "Gaussian Histogram (#sigma = 1)", 50,
-5, 5)
root [1] for(Int_t i = 0; i < 10000; i++){
root (cont'ed, cancel with .@) [2] Double_t x = gRandom->Gaus();
root (cont'ed, cancel with .@) [3] hist->Fill(x);
root (cont'ed, cancel with .@) [4]}
root [5] hist->Draw()
```

❶ 乱数を生成し
❷ 詰める

※ 実際には、測定値などを詰める

ヒストグラムの基本的な量




```
root [6] hist->GetEntries()
(Double_t) 10000.0
root [7] hist->GetMean()
(Double_t) 0.008331
root [8] hist->GetStdDev()
(Double_t) 1.008
root [9] hist->GetMeanError()
(Double_t) 0.00997350
root [10] hist->GetStdDevError()
(Double_t) 0.00705233
```

❶ 総数

❷ 標本の平均値（母集団の真の平均値ではない）

❸ 標本の標準偏差（standard deviation）

❹ 平均値の統計誤差

❺ 標準偏差の統計誤差

平均値、分散、標準偏差

- 平均値：通常、ある物理量の相加平均（母平均は μ）

標本平均 $$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_N}{N}$$

母平均 $$\mu = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

- 分散：その分布の散らばり具合を示す

(不偏)標本分散 $$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$

※ ROOT は N で割っている

母分散 $$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

- 標準偏差：散らばり具合を物理量と同じ次元で示す

標本の標準偏差 s　　母集団の標準偏差 σ

RMS と混同しないこと

- RMS（二乗平均平方根）と標準偏差は定義が異なります

$$\mathrm{RMS} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

※ 平均を引かない

- PAW や ROOT ユーザの多くが混同しているので注意
  - PAW が最初に間違い、ROOT は意図的に間違いを継承した
  - 最新の ROOT では、RMS という言葉はもう使われない

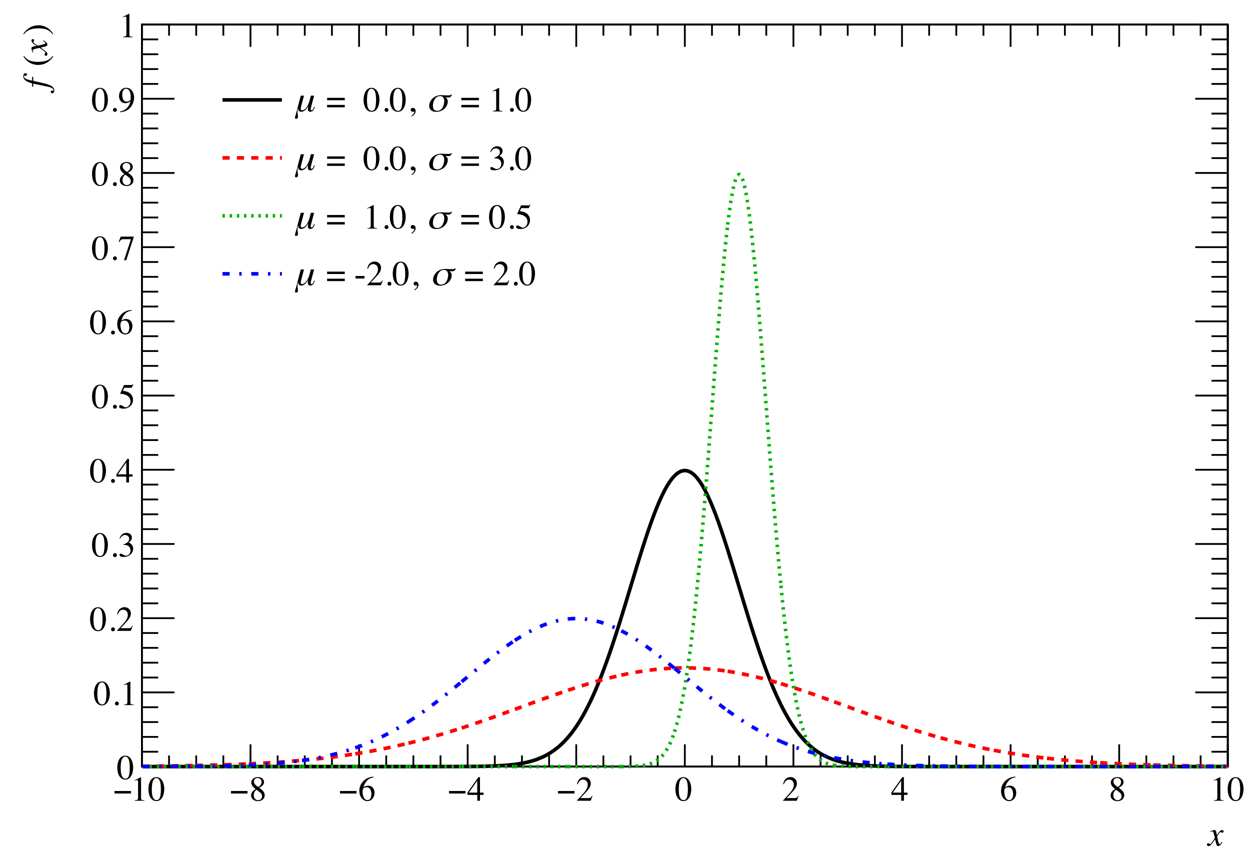
正規分布

正規分布（Normal Distribution）とは

- ガウス分布（Gaussian distribution）とも
- 平均値 μ と分散 σ^2（もしくは標準偏差 σ）で表される

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- 我々が最も頻繁に使う分布
- 多数の確率過程が組み合わさった場合、結果として出てくる物理量が正規分布に従う（中心極限定理）
- 面積一定の場合、高さと幅は $1/\sigma$ と σ に比例する



GetMeanError と GetStdDevError

- 母集団の分布や理論的な分布が正規分布であったとしても、限られた実験データ（標本）は母集団を完全に再現しない
- 標本から得られる平均値や標準偏差は、真の値とはずれる
- TH1::GetMeanError と GetStdDevError は、そのずれの推定量を返す
- 正規分布の場合、物理量 x に対し次の推定量の誤差があることが知られている

$$\delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}} \qquad \delta s = \frac{s}{\sqrt{2N}}$$

確かめてみる

```
$ cat StandardError.C
void StandardError() {
  const Int_t kSampleSize = 10000;
  const Int_t kRepeat = 10000;
  const Double_t kMean = 0.;
  const Double_t kSigma = 1.;

  TH1D* hMeanError = new TH1D("hMeanError", ";<#it{x}>", 100, -0.05, 0.05);
  TH1D* hStdDevError = new TH1D("hStdDevError", ";#it{#sigma}_{#it{x}}", 100, -0.05,
0.05);

  for(Int_t i = 0; i < kRepeat; i++){
    TH1D h("", "", 100, -5, 5);
    for(Int_t j = 0; j < kSampleSize; j++){
      Double_t x = gRandom->Gaus(kMean, kSigma);
      h.Fill(x);
    }
    hMeanError->Fill(h.GetMean() - kMean);
    hStdDevError->Fill(h.GetStdDev() - kSigma);
  }

  TCanvas* can = new TCanvas("can", "can", 1200, 600);
  can->Divide(2, 1, 1e-10, 1e-10);
  can->cd(1);
  hMeanError->Draw();
  can->cd(2);
  hStdDevError->Draw();
}
```

❶ 平均 $\mu = 0$、標準偏差 $\sigma = 1$

❷ 真の値からどれだけずれたかを詰めるヒストグラム

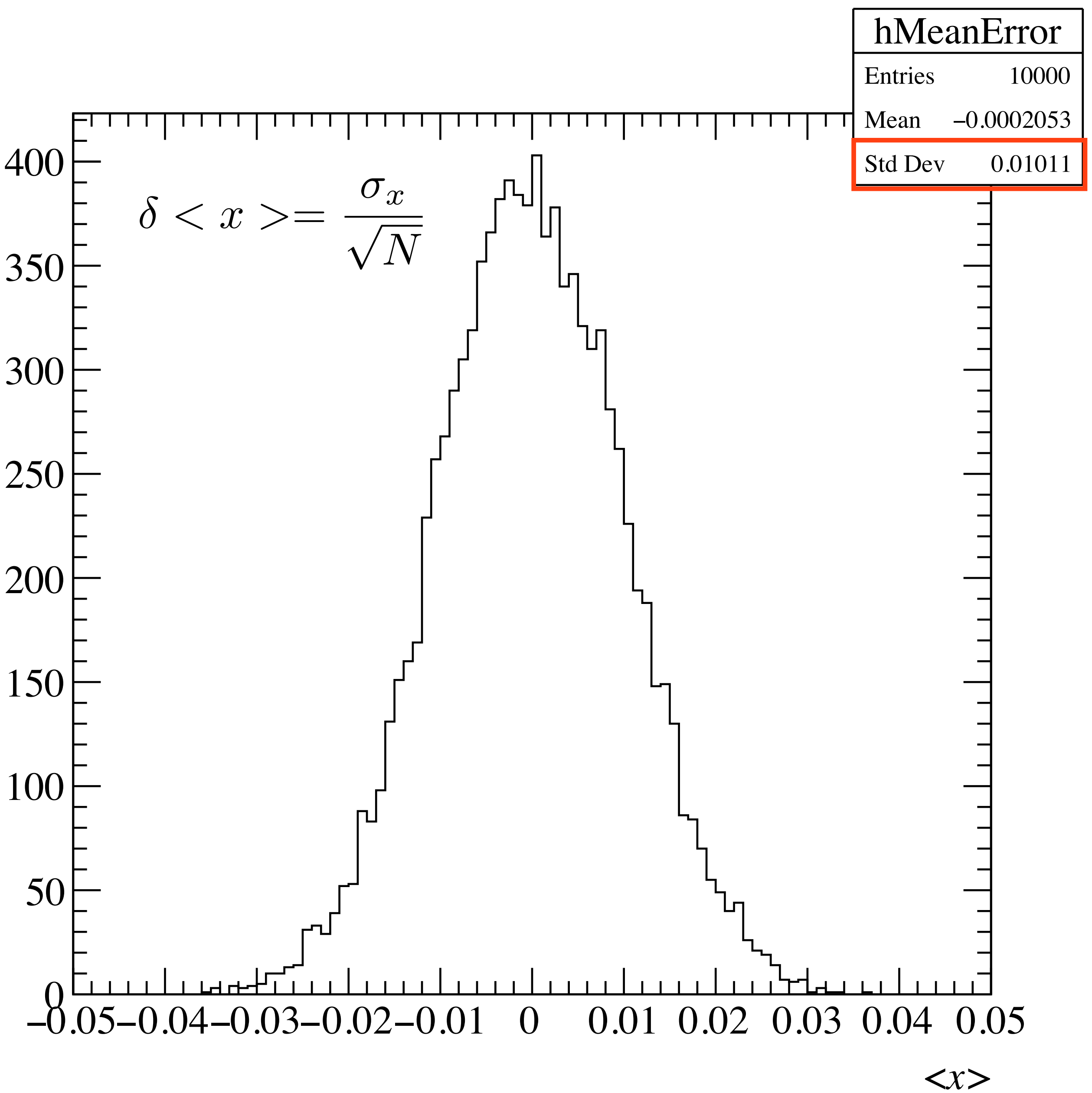
❸ $\mu = 0$、 $\sigma = 1$ で乱数を 10,000 回生成

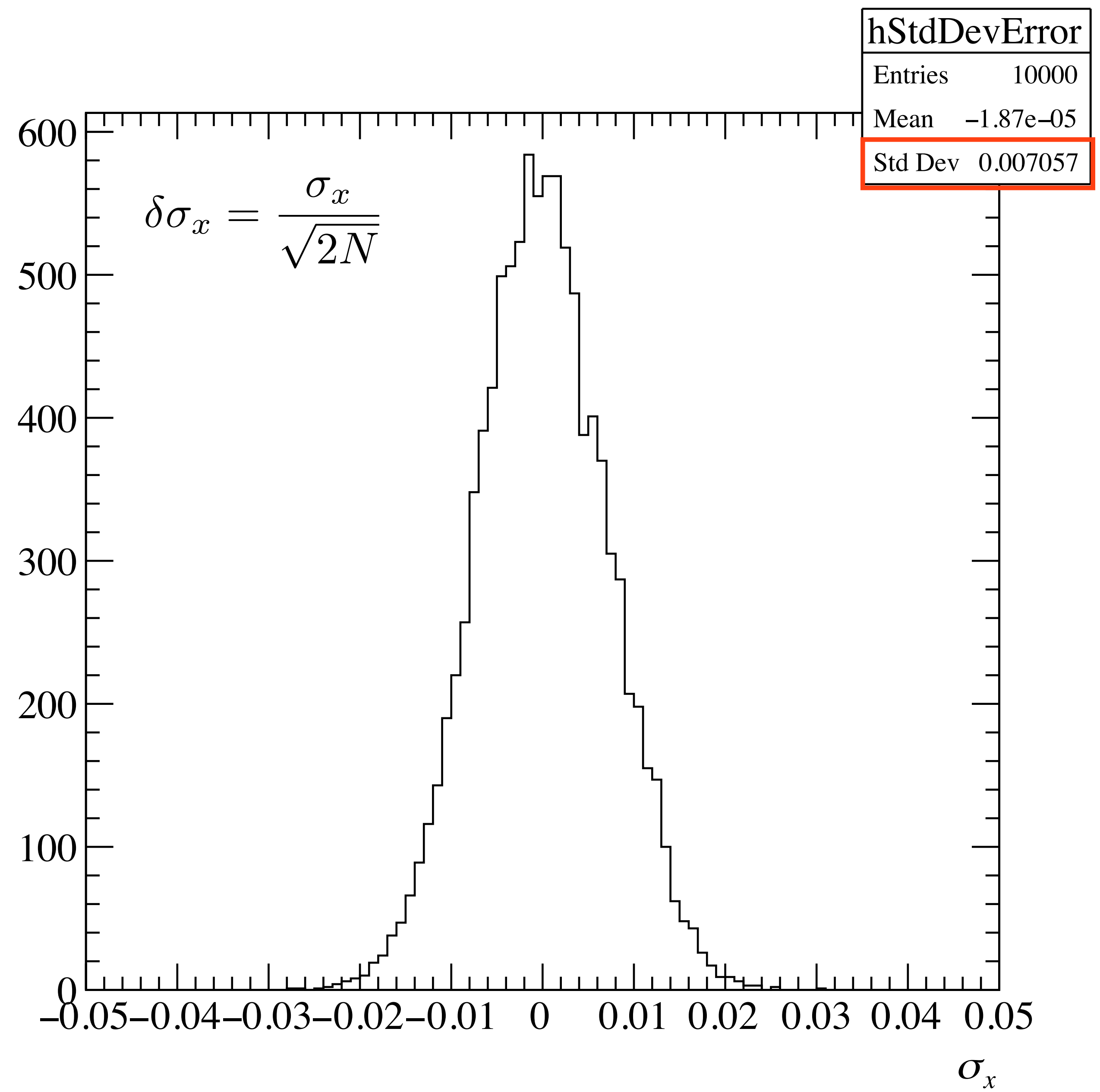
❹ 標本で得られた $\bar{x}$ と σ_x の、真値との差を詰める

これも 10,000 回繰り返し

❺ Draw する

確かめてみる





- $\sigma_x/\sqrt{N} = 1/100 = 0.01$
- $\sigma_x/\sqrt{2N} = 1/(1.4\cdots \times 100) = 0.0707$
- 誤差の範囲で一致している

大事なこと

- 通常の測定は母集団から標本を抜き出しているだけ
- 真の分布は知りえないので標本から推定する
- 平均値や標準偏差は、標本から計算されたもの
  - 真の平均値からの誤差は $\sigma_x/\sqrt{N}$
  - 真の標準偏差からの誤差は $\sigma_x/\sqrt{2N}$

- ある確率分布に従う測定があった場合、統計誤差はその分布の標準偏差
- 多数の測定から平均値を求める場合は、統計誤差は $\sigma_x/\sqrt{N}$

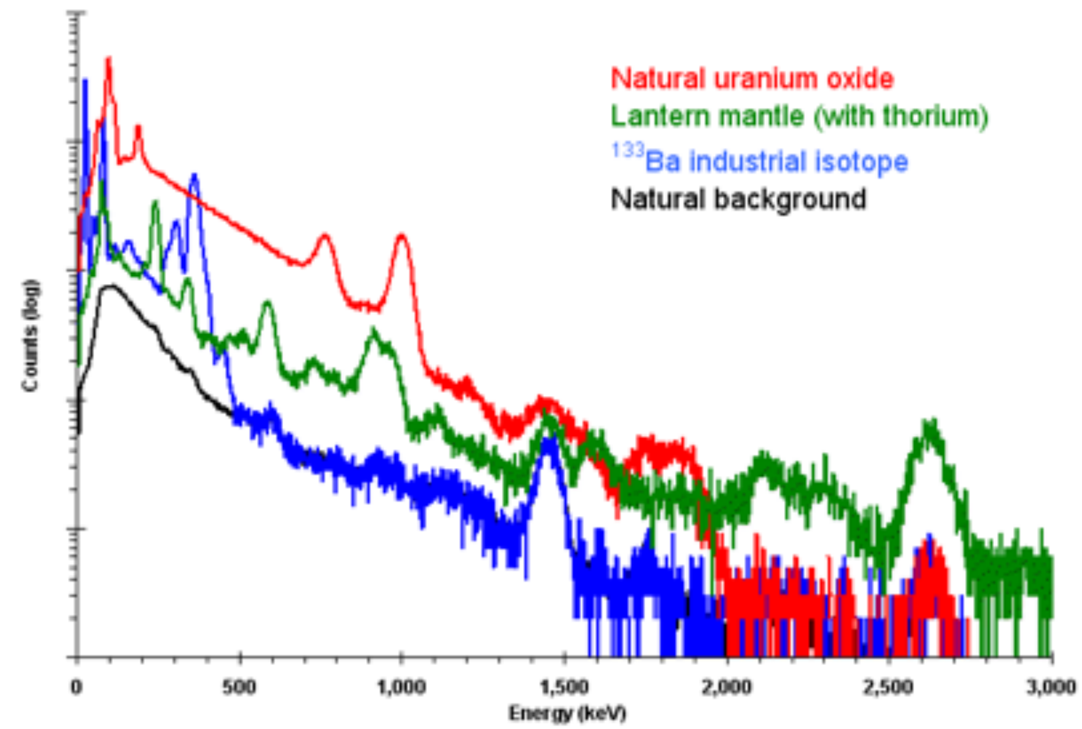
注意事項

- 実際に実験データを解析する場合、真に正規分布であることはほとんどない
  - 正規分布は正負の無限大の値を取りうるが、実際の測定でそのような値は取りえない
  - 光電子増倍管の出力波高を正規分布と仮定することがあるが、負のゲインはありえない
- ROOT で横軸の表示範囲を変更すると、平均値や標準偏差が表示範囲のみで再計算される
- ポアソン分布や指数分布などもあるので、各自勉強してください

フィッティング

ヒストグラムのフィッティング

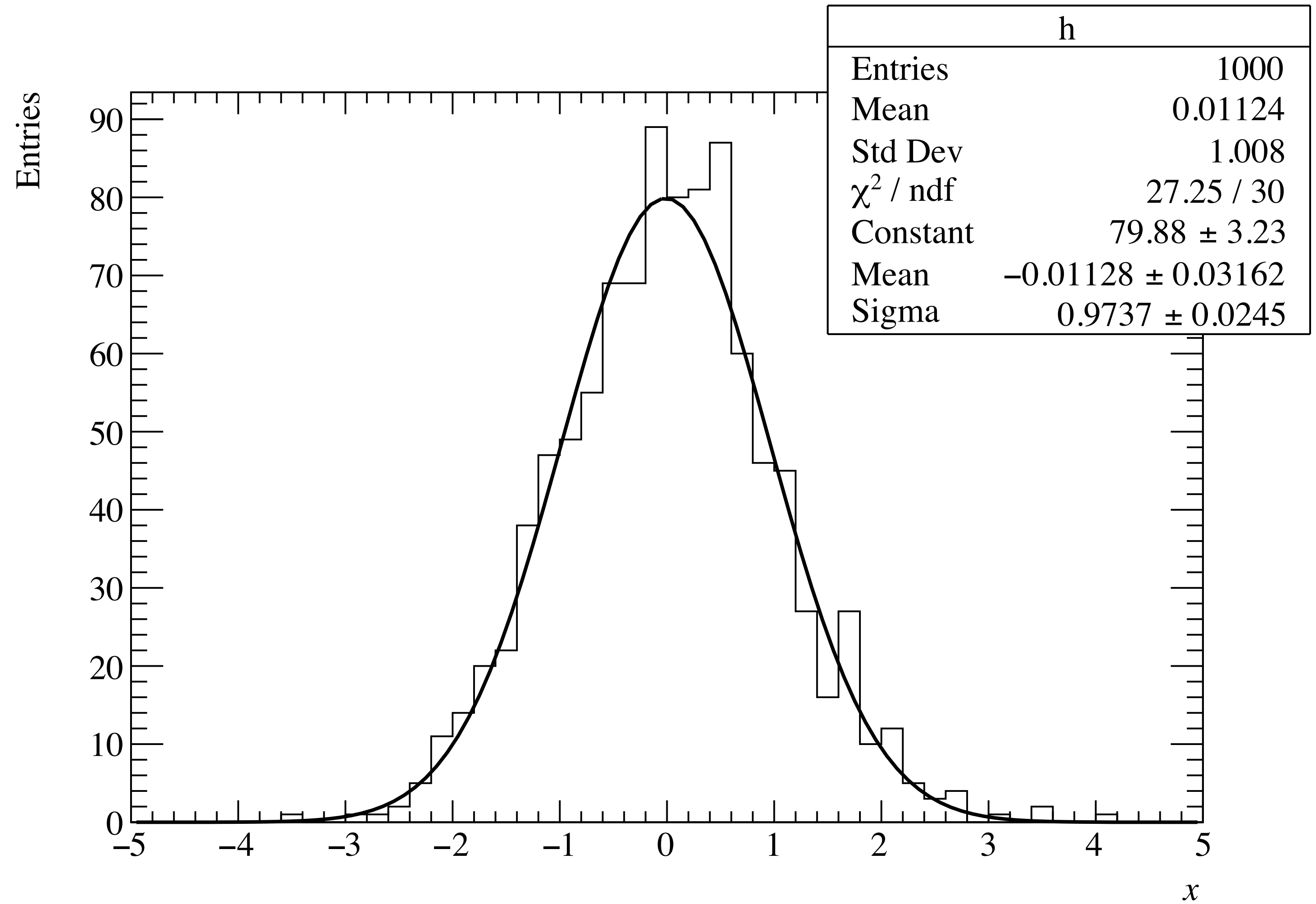
- 実験で得られたヒストグラムから物理量を抜き出すとき、単純な１つの正規分布であることは少ない
  - 複数のピークの存在するデータ
  - バックグラウンドを含むデータ



出典 Amptek
http://amptek.com/products/gamma-rad5-gamma-ray-detection-system/

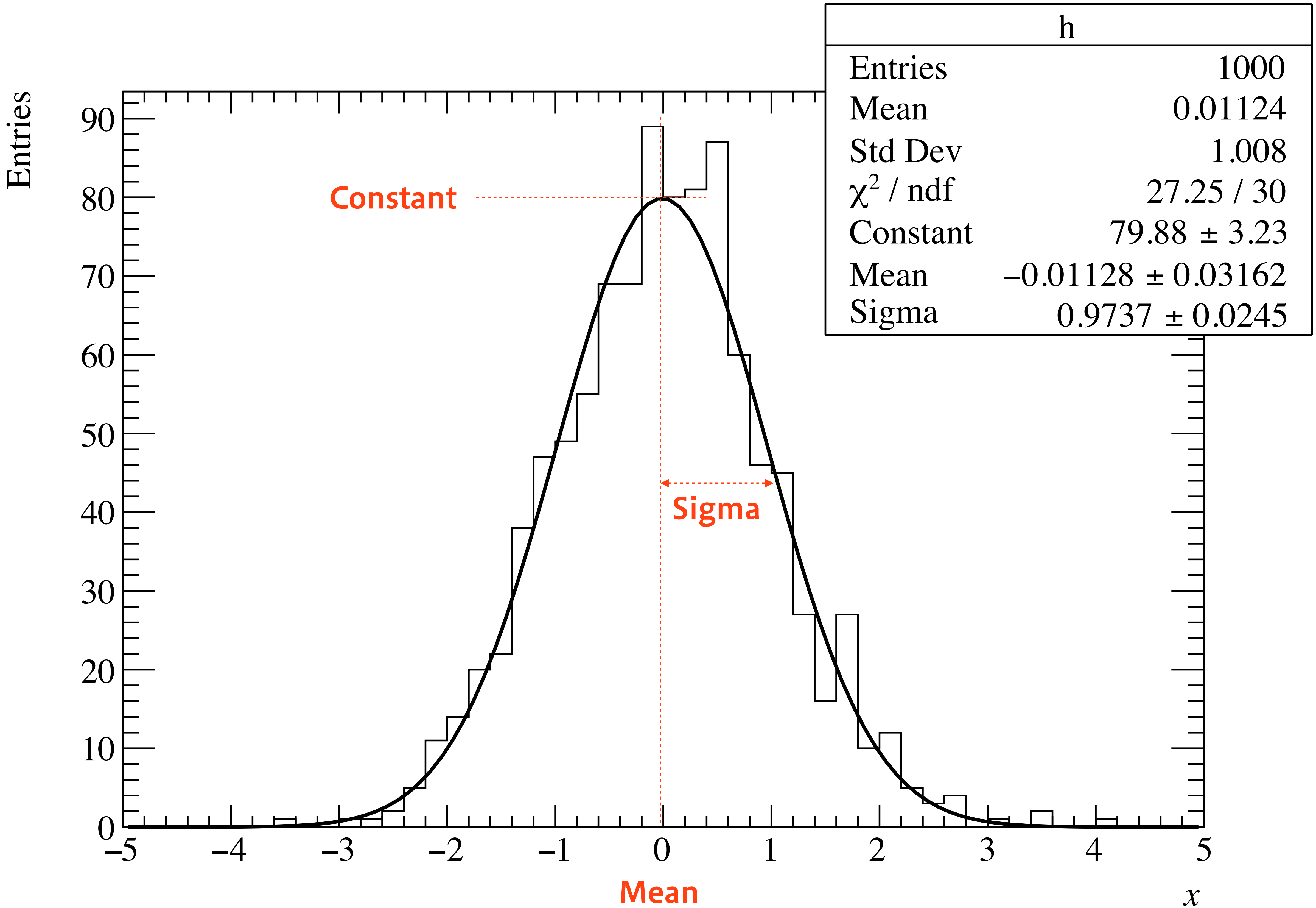
- ヒストグラムをよく再現するモデル関数を作り、フィッティング（fitting、曲線のあてはめ）を行うことで変数 (parameter) を得る

単純な例




```
root [0] TH1D* hist = new TH1D("h", ";#it{x};Entries", 50, -5, 5)
root [1] hist->FillRandom("gaus", 1000)
root [2] hist->Fit("gaus")
 FCN=27.2533 FROM MIGRAD    STATUS=CONVERGED      60 CALLS          61 TOTAL
                     EDM=1.22437e-07    STRATEGY= 1      ERROR MATRIX ACCURATE
  EXT PARAMETER                                  STEP         FIRST
  NO.   NAME      VALUE            ERROR          SIZE      DERIVATIVE
   1  Constant     7.98846e+01   3.22837e+00   6.64782e-03  -1.29981e-05
   2  Mean        -1.12836e-02   3.16206e-02   8.19052e-05  -1.55071e-02
   3  Sigma        9.73719e-01   2.44588e-02   1.69219e-05  -7.15963e-03
```

詳細


h
Entries 1000
Mean 0.01124
Std Dev 1.008
χ2 / ndf 27.25 / 30
Constant 79.88 ± 3.23
Mean −0.01128 ± 0.03162
Sigma 0.9737 ± 0.0245
Entries
Constant
Sigma
Mean
x
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5

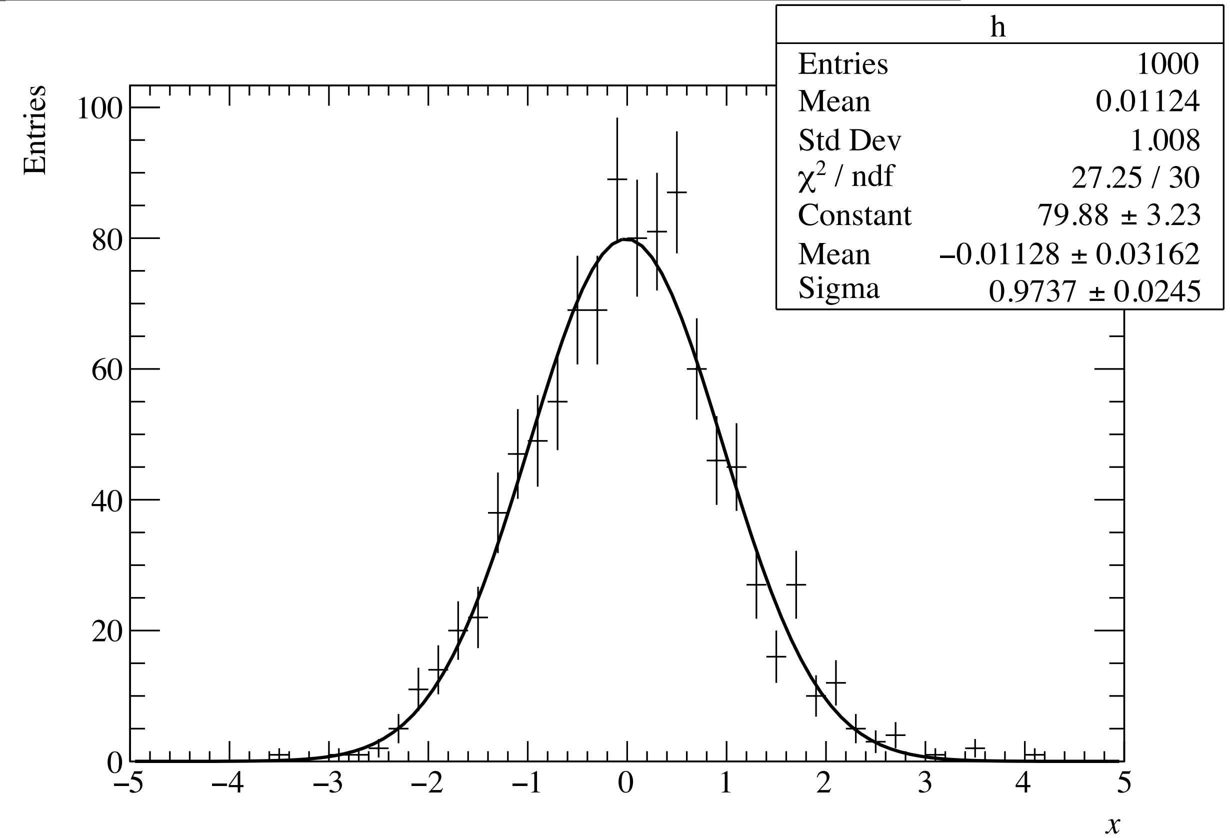
変数の比較

	平均	標準偏差
真値	0	1
ヒストグラム	0.011±0.032	1.008±0.023
フィット	-0.011±0.032	0.974±0.025

- 両者とも誤差の範囲で真値を推定できている
- 誤差の大きさは両者で同程度

ROOT は内部で何をしているか

- 各ビンには統計誤差が存在
  - そのビンに入る標本の大きさはポアソン分布に従う
  - $N > 20$ で正規分布と見なせる
- $\delta N = \sqrt{N}$ と近似できる



- 最小二乗法を用いて、カイ二乗（χ^2）を最小にするように、モデル関数の変数空間を探索する

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\delta y_i^2}$$

x_i : ビンの中心値
y_i : 各ビンの計数
$f(x_i)$: x_i におけるモデル関数の値
δy_i : y_i の誤差
N - 変数の数 : 自由度 ν

- この値はカイ二乗分布と呼ばれる確率密度関数に従う

χ^2 を最小にする理由

- 最も尤もらしいモデル関数は、測定されたデータ値の分布が最も生じやすい関数のはずである
  - 各データ点の誤差（ばらつき）は正規分布に従うとする
  - 各データ点の値が出る確率の積が、手元の標本になる確率になると見なす

$$
\begin{aligned}
\text{Prob.} &\propto \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta y_i^2}} \exp\left[-\frac{(y_i - f(x_i))^2}{2\delta y_i^2}\right] \\
&\propto \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{2\delta y_i^2}\right] \\
&= \exp(-\chi^2)
\end{aligned}
$$

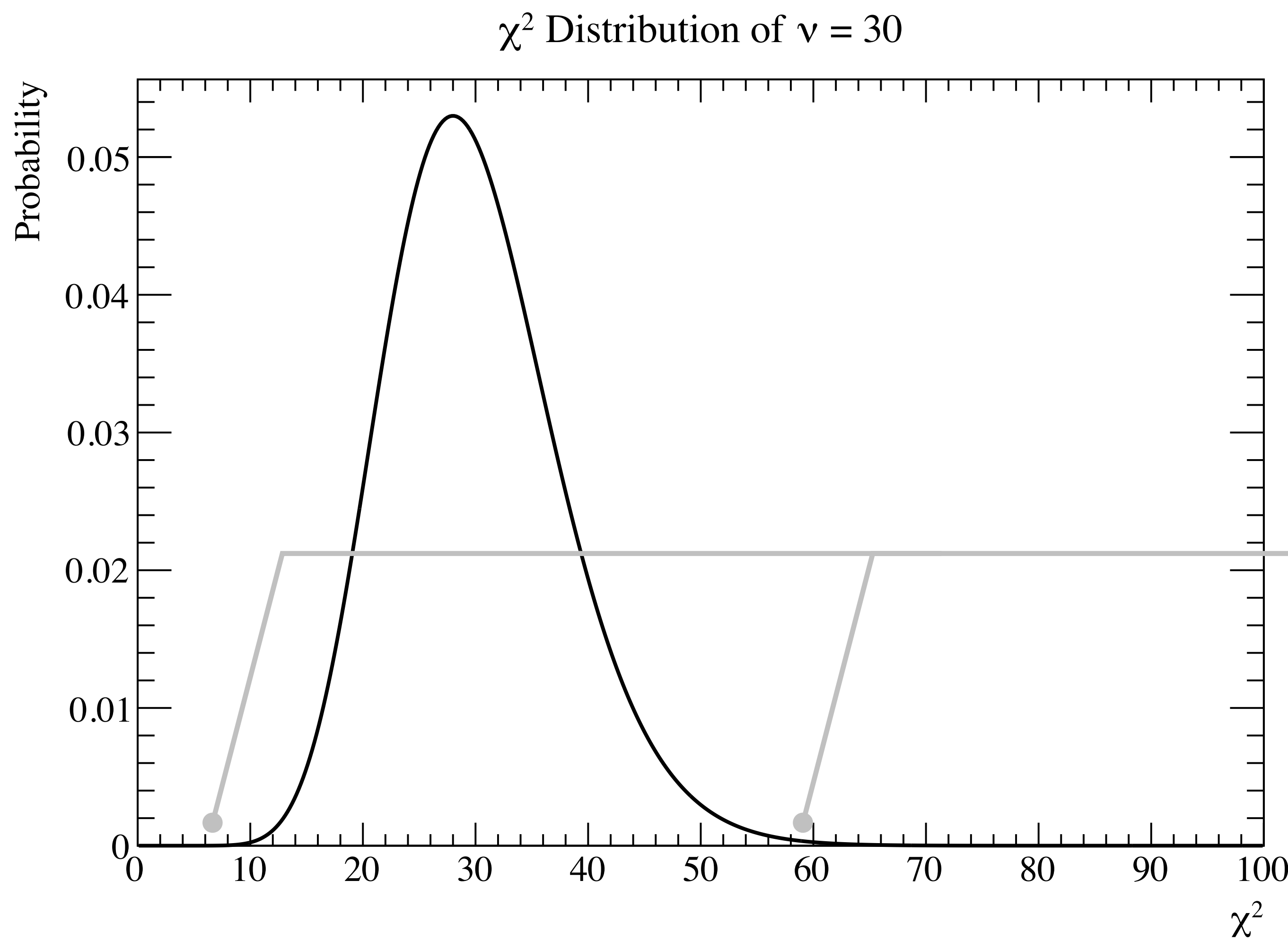
- 結局、χ^2 を最小にするのが、確率最大になる

カイ二乗分布

- 自由度 ν のカイ二乗の値は、カイ二乗分布に従う

$$P_\nu(\chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\nu/2-1} e^{-\chi^2/2}}{\Gamma(\nu/2) 2^{\nu/2}}$$

カイ二乗分布と p 値



このあたりに来ると
確率としてありえない
$p < 0.01$ や $p > 0.99$
くらいの場合、誤差の
評価が正しいか要確認

```
$ root
root [0] TF1* pdf = new TF1("pdf", "ROOT::Math::chisquared_pdf(x, [0], 0)", 0, 100)
root [1] pdf->SetTitle("#chi^{2} Distribution of #nu = 30;#chi^{2};Probability")
root [2] pdf->SetParameter(0, 30)
root [3] pdf->SetNpx(500)
root [4] pdf->Draw()
root [5] TMath::Prob(27.25, 30)
(Double_t) 0.610115
```

❶ カイ二乗分布の 1 次元関数 TF1 を作る

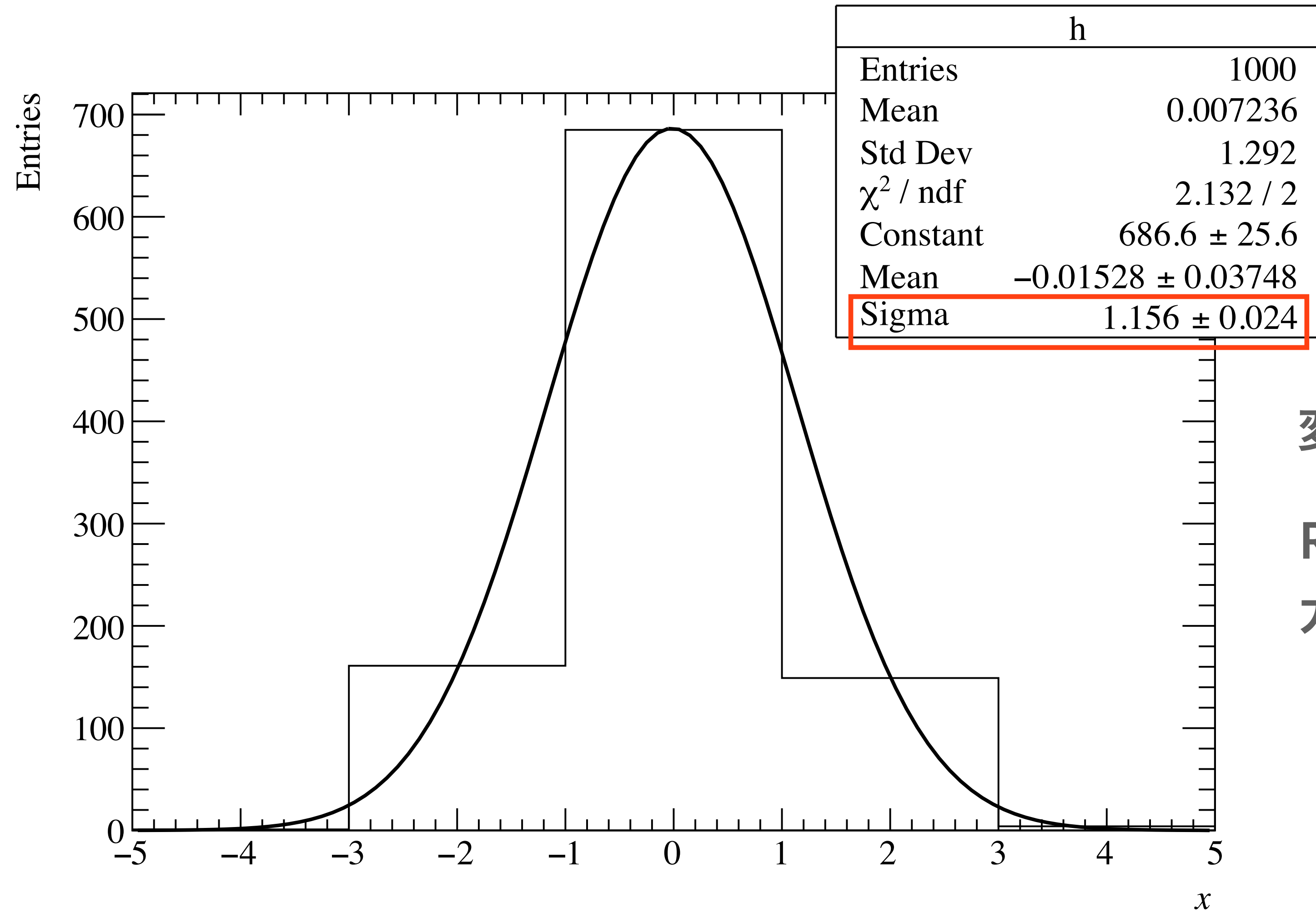
❷ 自由度 $\nu = 30$ に設定

❸ TF1 の点数を増やし表示を滑らかに（本質的でない）

❹ 確率の計算

$\nu = 30$、$\chi^2 = 27.25$ の場合、$p = 0.61$

モデル関数に比べてビン幅が広過ぎる場合

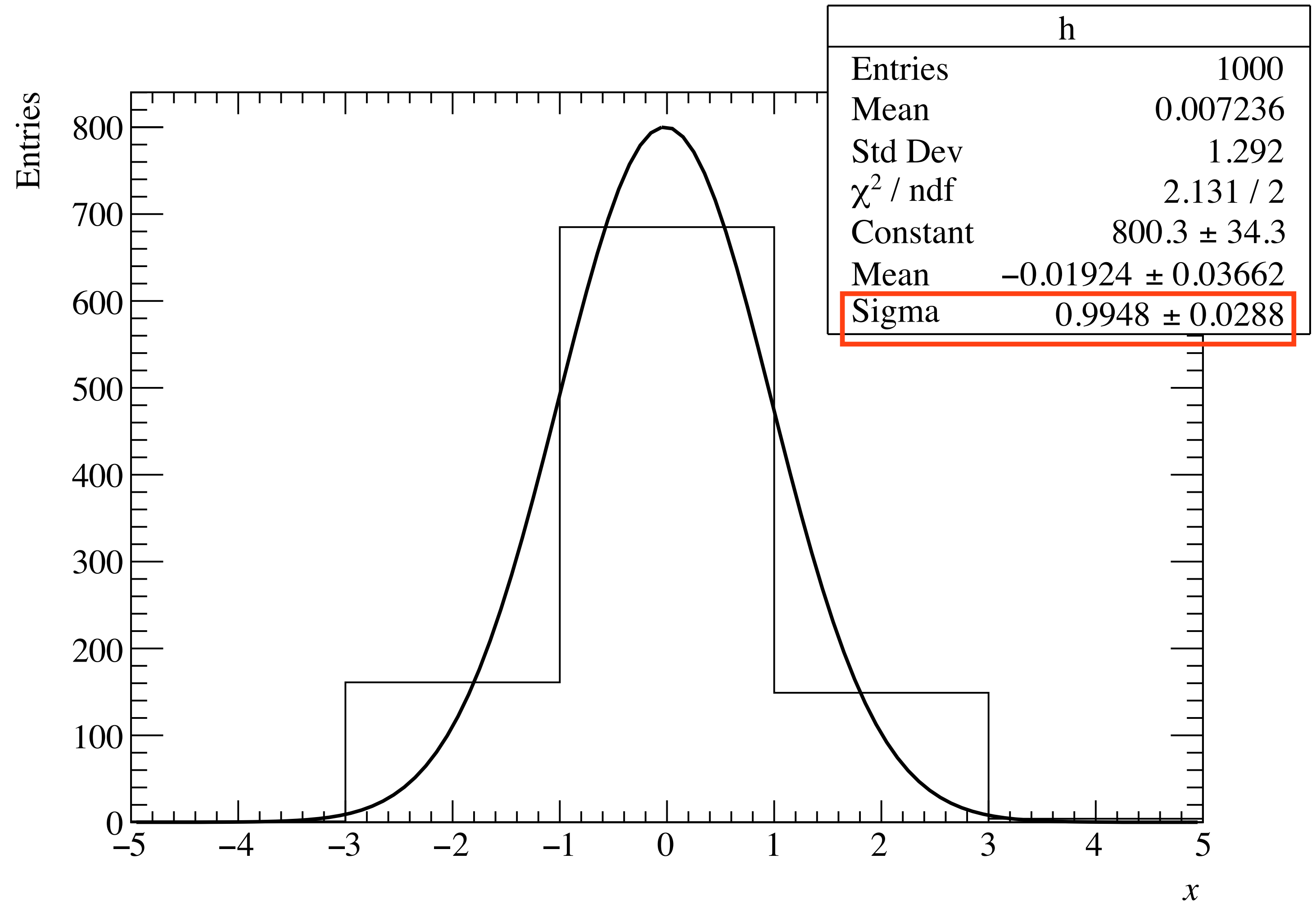


変数の推定を誤る！

ROOT がビンの中心値でカイ二乗を計算するため

```
root [0] TH1D* hist = new TH1D("h", ";#it{x};Entries", 5, -5, 5)
root [1] hist->FillRandom("gaus", 1000)
root [2] hist->Fit("gaus")
 FCN=2.13212 FROM MIGRAD    STATUS=CONVERGED      52 CALLS          53 TOTAL
                     EDM=2.37573e-07    STRATEGY= 1      ERROR MATRIX ACCURATE
  EXT PARAMETER                                  STEP         FIRST
  NO.   NAME      VALUE            ERROR          SIZE      DERIVATIVE
   1  Constant     6.86581e+02   2.55989e+01   1.87885e-02  -1.43368e-05
   2  Mean        -1.52834e-02   3.74843e-02   3.22360e-05   8.88105e-03
   3  Sigma        1.15649e+00   2.36229e-02   4.99586e-06  -1.09181e-01
```

“i” (integral) オプションを使う

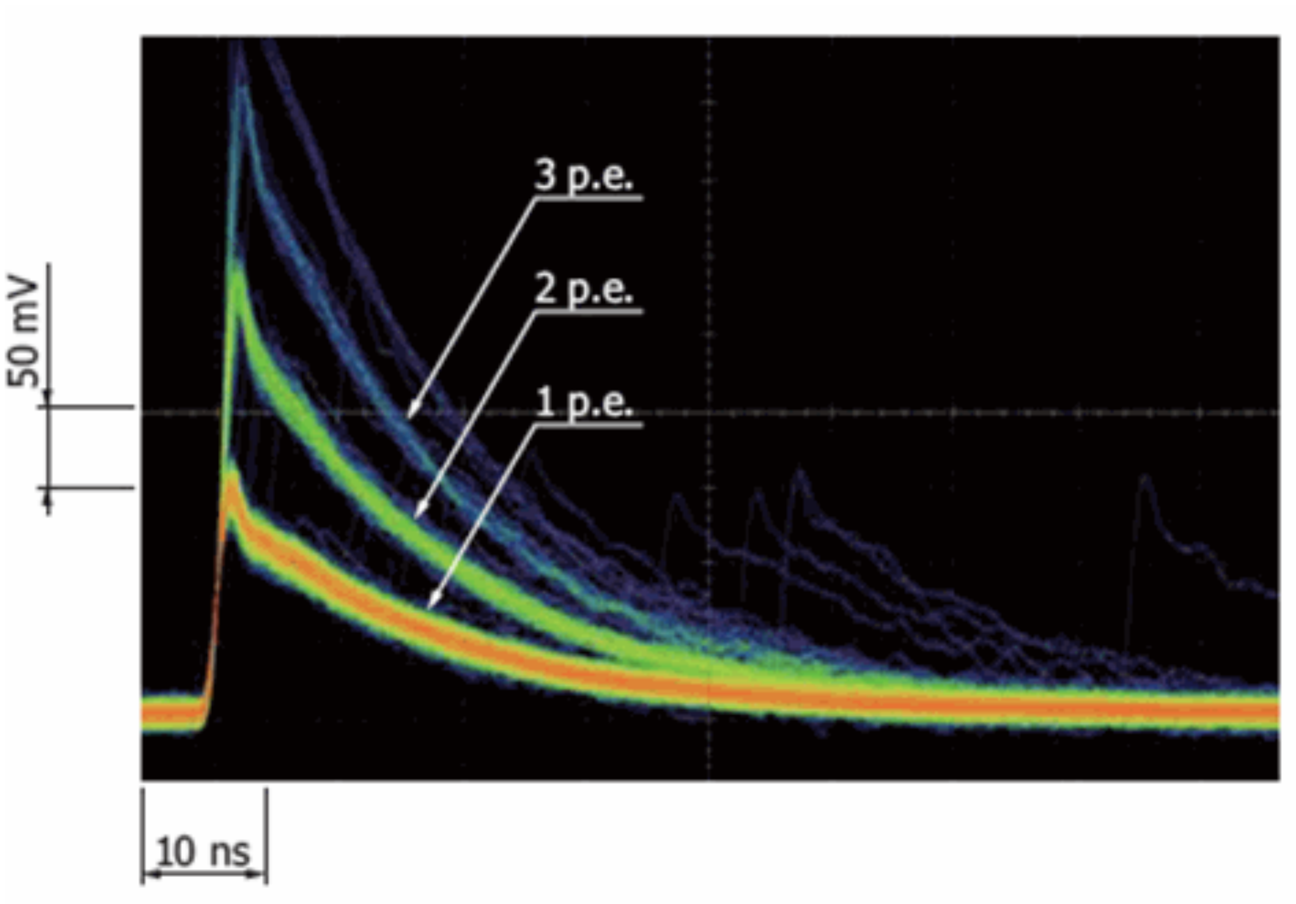



```
root [0] TH1D* hist = new TH1D("h", ";#it{x};Entries", 5, -5, 5)
root [1] hist->FillRandom("gaus", 1000)
root [2] hist->Fit("gaus", “i”)
 FCN=2.13123 FROM MIGRAD    STATUS=CONVERGED     104 CALLS         105 TOTAL
                     EDM=2.22157e-07    STRATEGY= 1      ERROR MATRIX ACCURATE
  EXT PARAMETER                                   STEP         FIRST
  NO.   NAME      VALUE            ERROR          SIZE      DERIVATIVE
   1  Constant     8.00322e+02   3.43377e+01   2.18847e-02  -1.06589e-05
   2  Mean        -1.92391e-02   3.66159e-02   3.15299e-05  -1.19143e-03
   3  Sigma        9.94826e-01   2.88088e-02   5.67273e-06  -9.54913e-02
```

“i” を追加

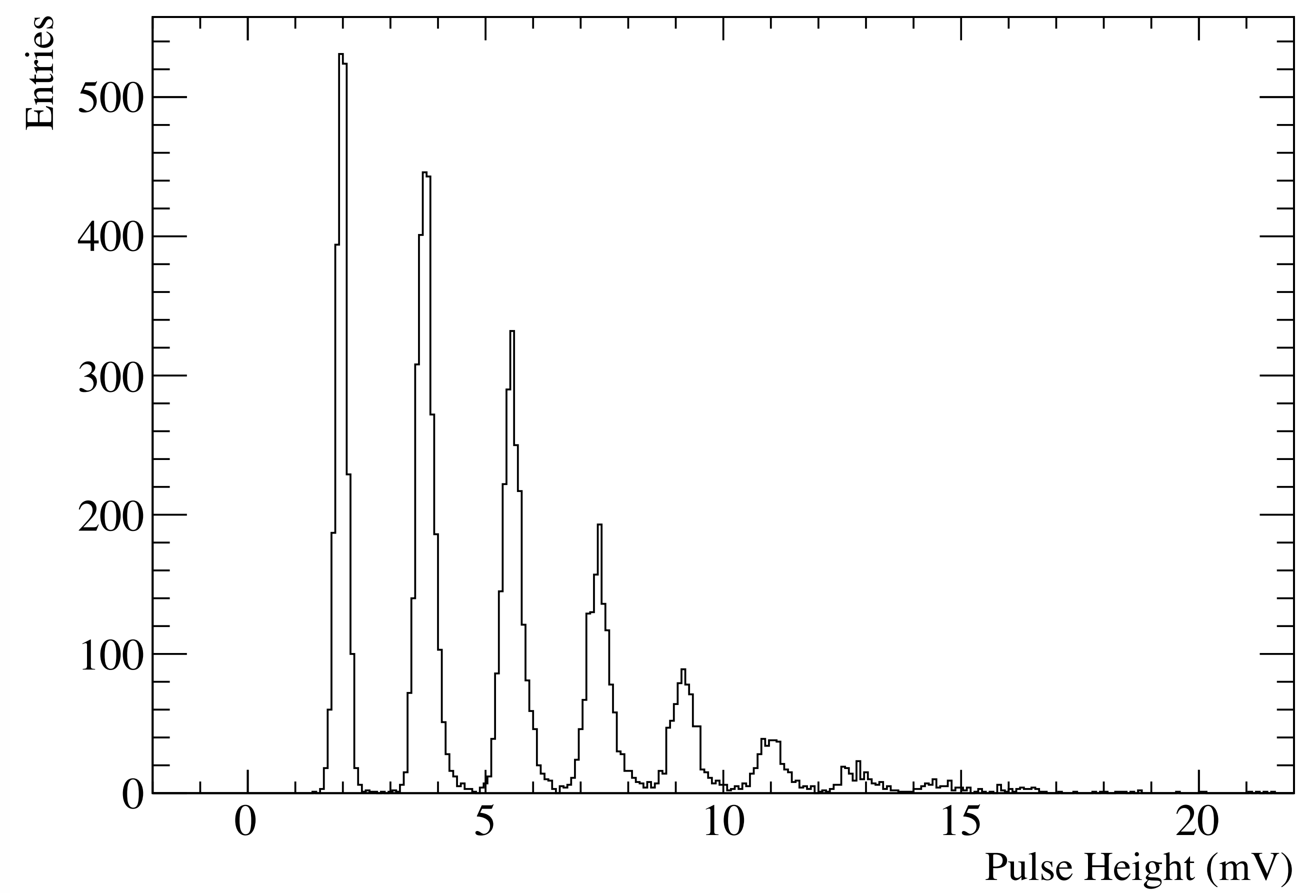
実験室におけるデータ例

正規分布でのフィット例



半導体光検出器の出力波形例
（浜松ホトニクス）

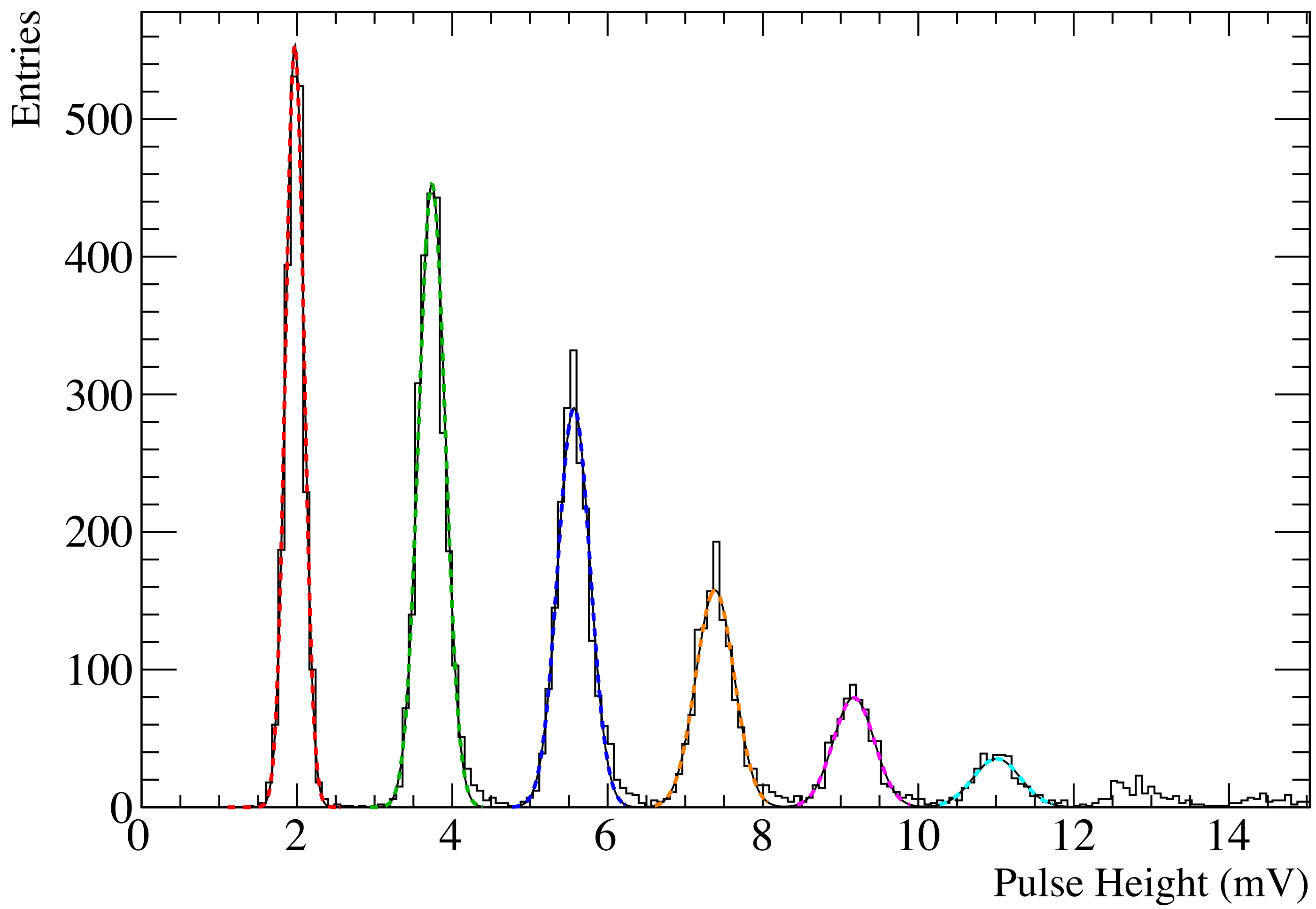
http://www.hamamatsu.com/us/en/community/optical_sensors/sipm/physics_of_mppc/index.html



半導体光検出器の出力波高分布例
（データ提供：日高直哉）

- 光検出器の出力電荷や波高分布は、正規分布でよく近似できる場合が多い
- 半導体光検出器の場合、光電変換された光電子数に比例して波高が綺麗に分かれる
- 光電子数分布や利得（gain）の評価に正規分布でのフィット

複数の正規分布によるフィットの例




```
$ root
root [0] .x MppcFit.C
```

第 2 回のまとめ

- ヒストグラムとは何か
- TH1 を使った ROOT でのヒストグラムの例
- 正規分布
- カイ二乗分布と確率
- ROOT での 1 次元ヒストグラムのフィッティング

- 分からなかった箇所は、各自おさらいしてください