５. 奨励共同研究 目次詳細

（所属・学年は平成31年3月現在）

5次精度の保存型無振動スキームのパラメータチューニングと Vlasov シミュレーションへの適用

Parameter tuning of a 5th order conservative and non-oscillatory scheme and its application to Vlasov simulation

辻根　成、富山大学大学院・理工学教育部・博士課程2年
佐藤　雅弘、富山大学大学院・理工学研究部・教授

【研究体制】
春木　孝之（富山大学大学院・理工学研究部・准教授）
成行　泰裕（富山大学・人間発達科学部・准教授）
梅田　隆行（所内担当教員）

【研究目的】　Vlasov シミュレーションはプラズマの位相空間（空間－速度空間）における分布関数を直接取り扱う手法である。いくつか手法が提案されている中、「保存型無振動スキーム」は保存型セミラグランジュ法により質量保存性と計算コスト軽減を実現し、またリミッター機能により分布関数の無振動性と正値性を保証している(Umeda *et al.*, CPC, 2012)。このリミッター機能には分布の勾配を制御するパラメータが存在するため、これらを最適化する必要がある。本研究では、最終的に分布の形状に応じて最適なパラメータが選択される、5次精度の保存型無振動スキームを構築することを目標としている。これまで、5次精度の保存型無振動スキームの最適なパラメータセットを見つけるために、ガウシアン分布に対してフラックスの数値解を求め、解析解との誤差の評価を行った。その結果、第一に、リミッターはガウシアン分布の裾で必要になることがわかった。第二に、誤差が最小となるときの2種類のパラメータには関係性があることが明らかとなった。今回は、分布をガウシアンから、曲率の異なるスーパーガウシアンに変更して、パラメータセットの傾向や誤差について明らかにする。

【研究方法】　分布を曲率の異なるスーパーガウシアンに変更して、フラックスの数値解と解析解の誤差が最小となるパラメータセットの探索を行う。数値解と解析解の誤差はそれぞれの全ての CFL 数に対するフラックスの差を f で割ったものの二乗を平均して求めた。f が単調増加している場合、数値解となる保存型無振動スキームのリミッターは

$$L_{3-2} = \min[(f_3 - f_2), a_p(f_{max} - f_3)] \quad L_{2-1} = -\min[(f_1 - f_2), b_p(f_3 - f_{min})]$$

と定義される。リミッターは min 関数によって、勾配がより滑らかなとなる項を選択する。パラメータ a_p , b_p が変化することで、選択される項も変化する。また、フラックスの解析解は以下のようにして求めることができる。

スーパーガウシアン関数

$$f_{\mathrm{model}} = \frac{n}{\sqrt{2}V\Gamma\left(\frac{1}{2n},0\right)}\exp\left(-\left(\frac{x}{\sqrt{2}V}\right)^{2n}\right)$$

第2種不完全ガンマ関数

$$\Gamma(\alpha,\chi) = \int_{\chi}^{\infty}\tau^{\alpha-1}\exp(-\tau)\,d\tau$$

フラックスの解析解

$$U_{\mathrm{A},i+\frac{1}{2}}(\mu) = \frac{\mathrm{sign}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)}{2\Delta x} - \frac{\mathrm{sign}\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\mu\Delta x\right)}{2\Delta x} - \frac{\mathrm{sign}\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right)}{2\Delta x\Gamma\left(\frac{1}{2n},0\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2n},\left(\frac{\left|x_{i+\frac{1}{2}}\right|}{\sqrt{2}V}\right)^{2n}\right) + \frac{\mathrm{sign}\left(x_{i+\frac{1}{2}}-\mu\Delta x\right)}{2\Delta x\Gamma\left(\frac{1}{2n},0\right)}\Gamma\left(\frac{1}{2n},\left(\frac{\left|x_{i+\frac{1}{2}}-\mu\Delta x\right|}{\sqrt{2}V}\right)^{2n}\right)$$

$x_i = i\Delta x$　i ：格子点のインデックス
Δx ：刻み幅

変化する a_p, b_p の中で誤差が最小となるパラメータ $a,\ b$ を計算した後、最小二乗法によって回帰直線を求めることで誤差が最小となるパラメータ $a,\ b$ の関係式を導出した。

【研究結果と考察】

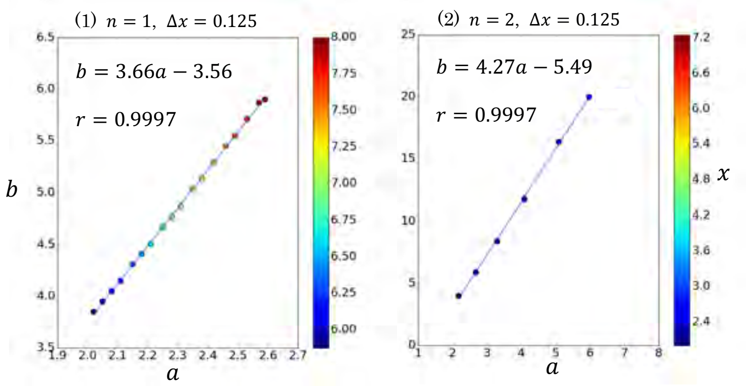

図 1：スーパーガウシアン分布（$n = 1, 2$）における、数値解と解析解の誤差が最小となるパラメータ a, b、およびその回帰直線。
カラー：パラメータセットの空間座標
直線：最小二乗法による回帰直線（パラメータ a, b が一定値となる部分は除く）
r ： 相関係数

図1はスーパーガウシアン分布（$n = 1, 2$）における、数値解と解析解の誤差が最小となるパラメータ $a,\ b$、およびその回帰直線である。
図1(1)と(2)を比較すると、回帰直線は異なる。つまり、$a - b$ 関係式は n に依存することがわかる。この他に $a - b$ 関係式は Δx にも依存することがわかった。
次にスケーリング則を導入することで Δx の依存を回避することを考えた。

スケーリング則を用いた回帰直線

$$b_s = \frac{p}{(\Delta x)^q}(a-2)+d$$

$$d = \frac{b_1(a=2)+b_3(a=2)}{2}$$

$$p = \frac{b_1-d}{a-2}(\Delta x_1)^q$$

$$q = \log_{\frac{\Delta x_3}{\Delta x_1}} \frac{b_1-d}{b_3-d}$$

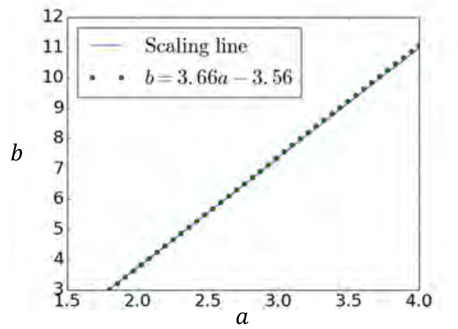

図 2：図 1（1）の回帰直線（緑点）とスケーリング後の回帰直線（青線）

ここで、インデックス1と2はそれぞれ $n = 1$ における $\Delta x = 0.148, 0.108$より得られるパラメータ $a,\ b$ である。図2 は 図1(1) で示された回帰直線とスケーリング後の回帰直線を示している。スケーリング則を導入することで、Δx を元に $a - b$ 関係式は求まることが確認できる。
この成果は、研究成果[1]で発表した。また、宇宙プラズマ中の不連続構造についても発表を行った[2]。

【研究成果】

[1] 辻根成，梅田隆行，成行泰裕 & 春木孝之，Parameter tuning of a 5th order conservative and non-oscillatory scheme with super Gaussian distributions，日本地球惑星科学連合2018年大会，幕張メッセ, 2018年5月（ポスター発表）
[2] N. Tsujine, T. Haruki, T. Umeda, Y. Nariyuki & M. Sato, The condition of electron temperatures to maintain total pressure in contact discontinuities: kinetic simulations, 地球電磁気・地球惑星圏学会 第143回総会及び講演会（2018年 秋学会），名古屋, 2018年11月（口頭発表）