物理実験学
〜測定誤差と最小二乗法〜

伊藤さんの代理：奥村曉（CR 研講師）

2019 年 12 月 13 日

名古屋大学
NAGOYA UNIVERSITY
ISEE Institute for Space–Earth Environmental Research
oxon@mac.com

講義のスライド

https://www.isee.nagoya-u.ac.jp/~okumura/files/191213LeastSquare.pdf

これまでに出てきた統計用語の復習（1）

- **母集団**：測定対象の数値や属性の集合全体
  例：鍋に入った味噌汁、日本人全体、超新星爆発から放出された全てのニュートリノ
- **標本**：実際に測定した値の集合（母集団の部分集合）
  例：小さじ一杯の味見の味噌汁、無作為抽出の電話アンケート、カミオカンデで検出されたニュートリノ
- **母平均**：母集団の平均 μ（真の平均）
- **標本平均**：標本の平均 x̄（母平均の良い推定値）

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

これまでに出てきた統計用語の復習（2）

- **分散**：値のばらつきの大きさの指標
- **母分散**：母集団の分散 σ^2

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

※ n は有限とは限らない

- **標本分散**：標本の分散 s^2

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

※ 母平均を知らない場合 $\bar{x}$ を使い
n - 1 で割る

- **標準偏差**：母分散や標本分散の平方根 σ もしくは s
次元が測定量と同じになる

サイコロの例

- サイコロの目は 1〜6 の整数値しかとらないので母平均は

$$\mu = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{7}{2}$$

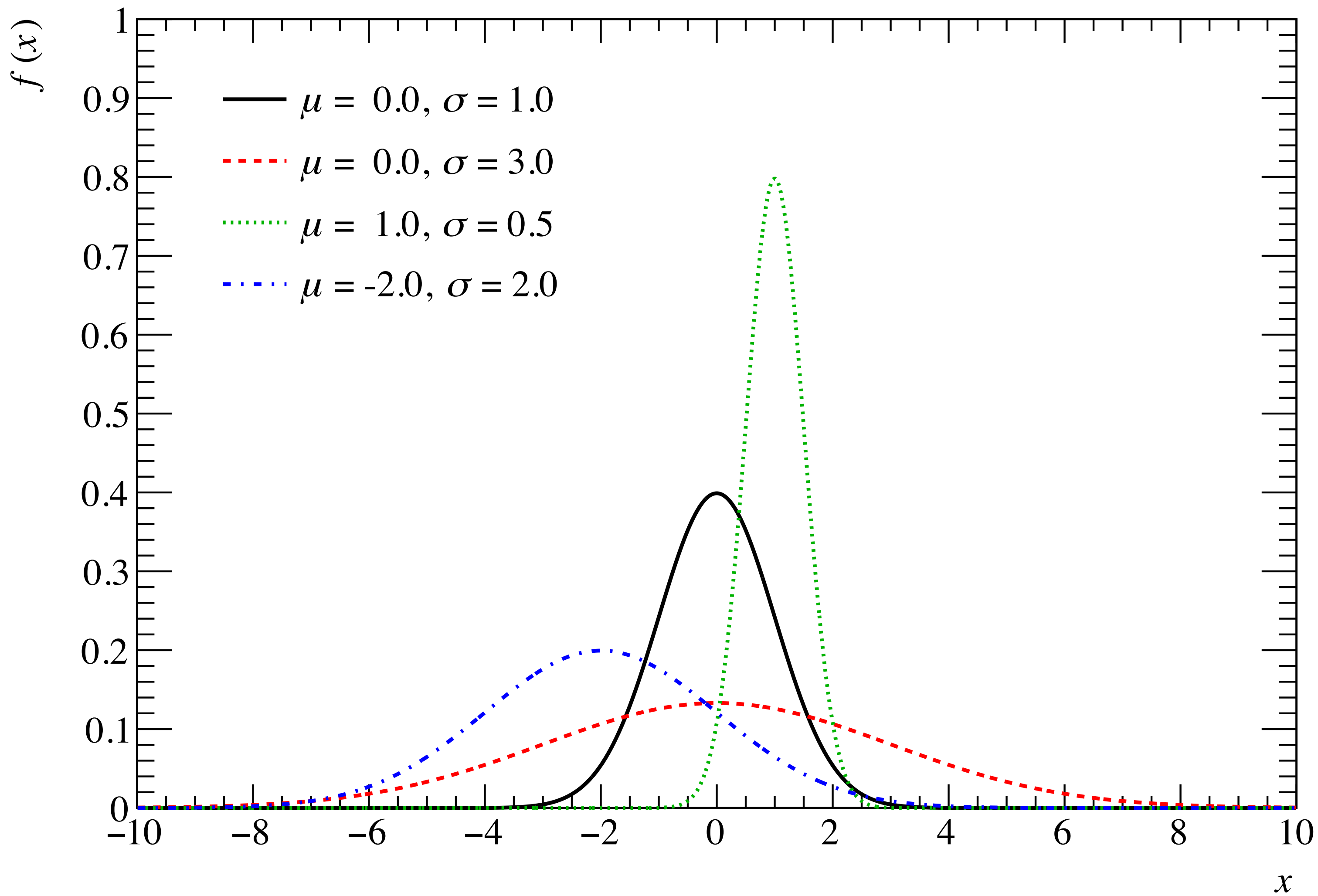
- 母分散は

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\left(i - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

- 標準偏差は

$$\sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \simeq 1.7$$

正規分布（ガウス分布）



$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

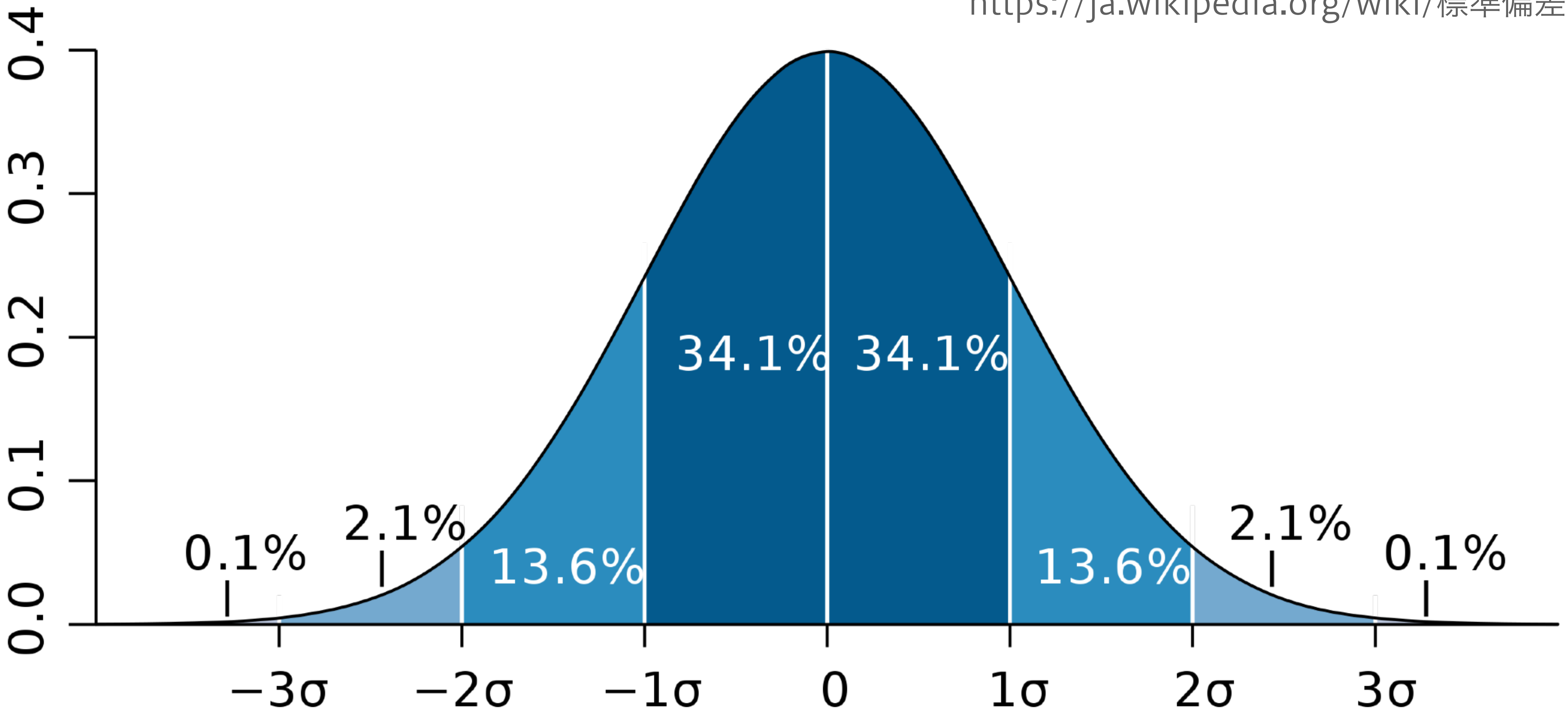
$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) = 1$$

興味のある人は実際に積分してみよ

- 統計学や自然界の様々な場所で現れる確率分布
- 平均値 μ と標準偏差 σ の 2 変数で特徴付けられる

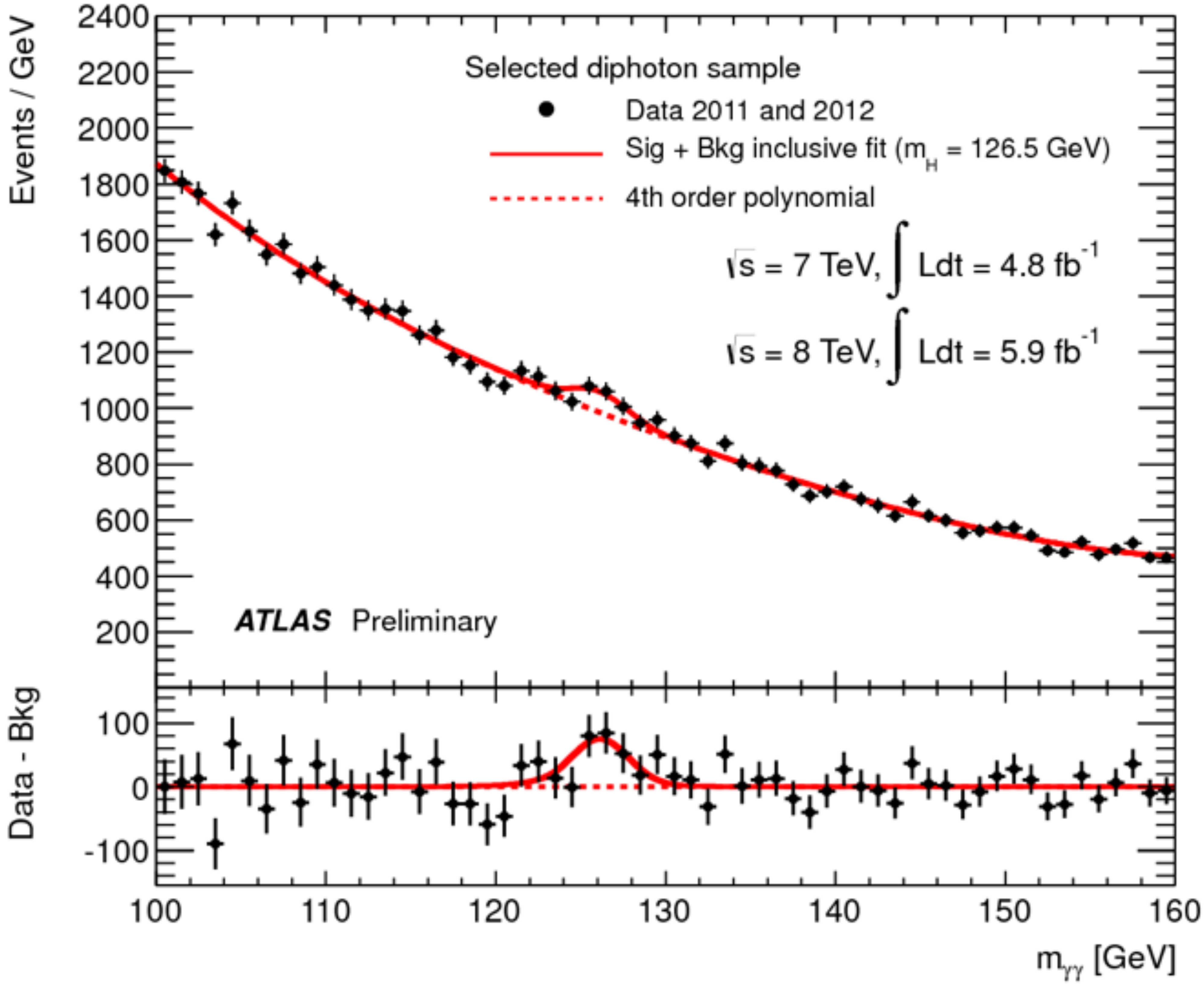
正規分布

https://ja.wikipedia.org/wiki/標準偏差



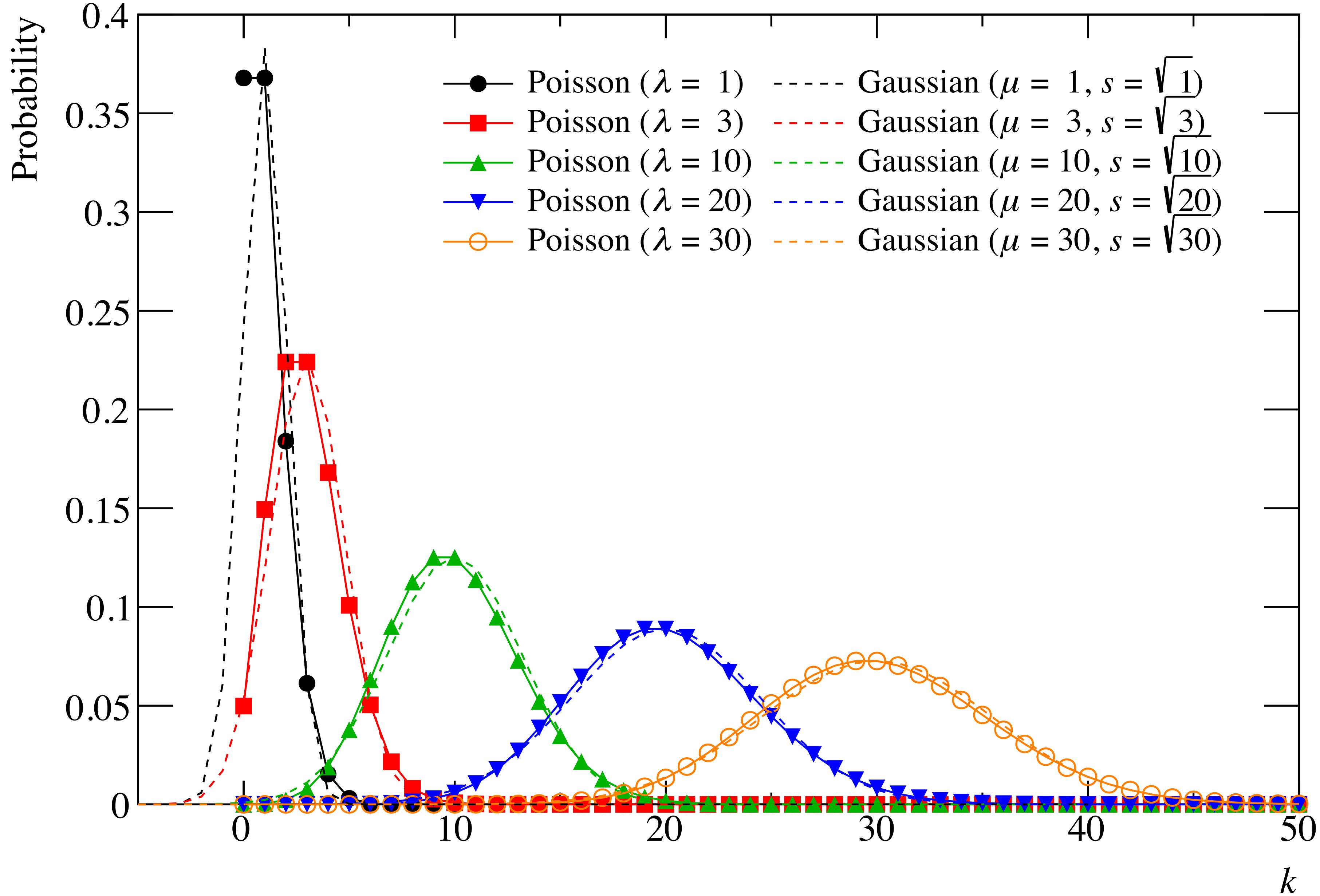
- ±1 σ の範囲に 68.3% が収まる
- 2 σ、3 σ の範囲だとそれぞれ 95.4%、99.7%
- 5 σ（素粒子物理学などで発見とされる）は 5.7 × 10^{-7}（サイコロで 1 が 8 回連続）

Higgs 発見の例



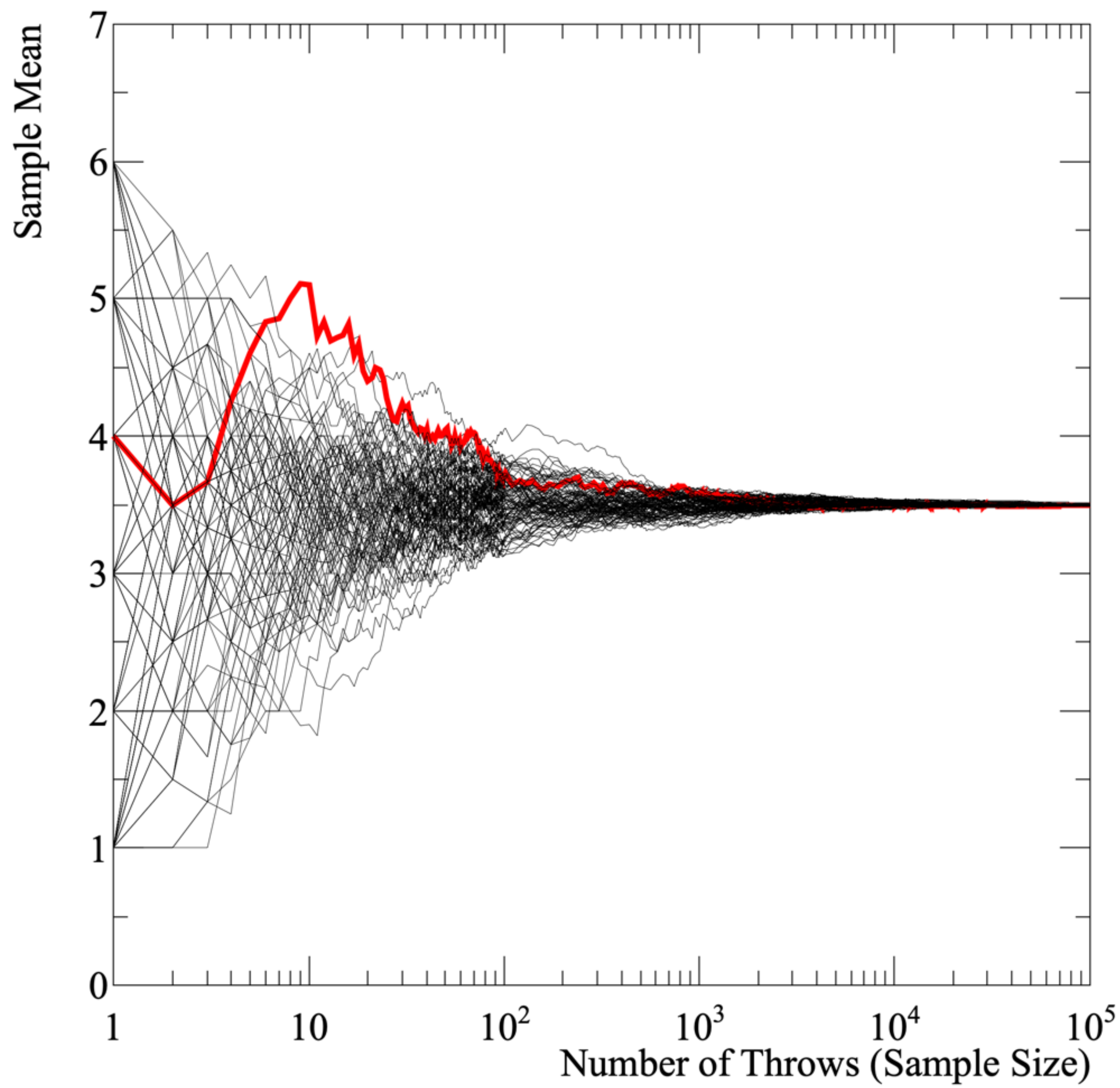
Events / GeV
2400
2200
2000
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
Selected diphoton sample
Data 2011 and 2012
Sig + Bkg inclusive fit (m_H = 126.5 GeV)
4th order polynomial
$\sqrt{s}$ = 7 TeV, $\int Ldt$ = 4.8 fb^{-1}
$\sqrt{s}$ = 8 TeV, $\int Ldt$ = 5.9 fb^{-1}
ATLAS Preliminary
Data - Bkg
100
0
-100
100
110
120
130
140
150
160
$m_{\gamma\gamma}$ [GeV]

ポアソン分布と正規分布



- ポアソン分布や二項分布（先日の赤玉と白玉の例）は、数が増えると正規分布で近似できることが知られている

大数の法則

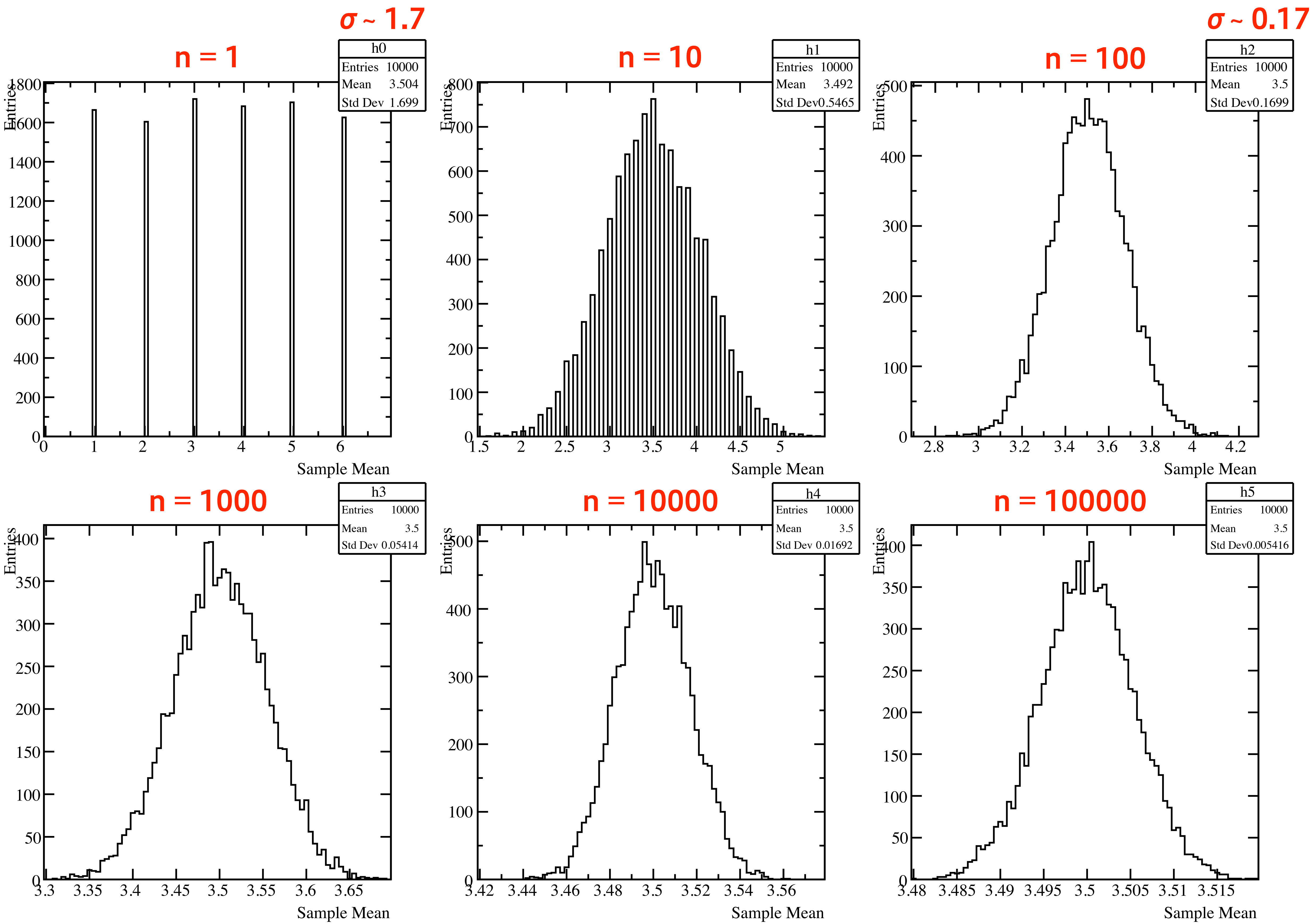


- 繰り返し行うことが可能で、かつ各試行が互いに影響を及ぼさない測定があるとき、その測定を多数回繰り返した際に得られる測定値の平均は、その測定の期待値に近づく
- 単純な例：サイコロを何回も振ると、平均値は 3.5 に近づく

中心極限定理

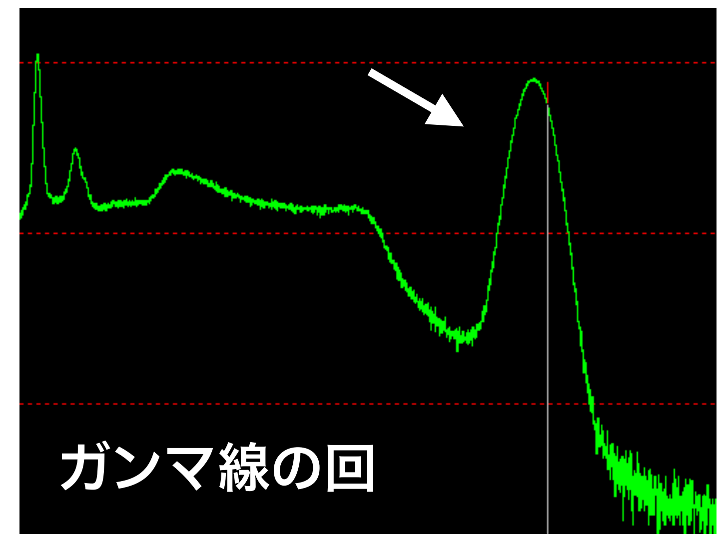
- （分散の定義できる）どのような確率分布の母集団（平均 μ、分散 σ）でも、標本サイズ n が十分大きくなると、得られる標本平均 $\bar{x}$ は平均 μ、分散 σ^2/n のガウス分布に従う
- つまり
  - 多数回の測定で平均値 $\bar{x}$ を算出すると、真の平均値 μ に近づく
  - 平均値 $\bar{x}$ の真の平均値 μ からのズレは、$\sigma/\sqrt{n}$ 程度である
  - 測定回数が多いほど誤差は小さくなる

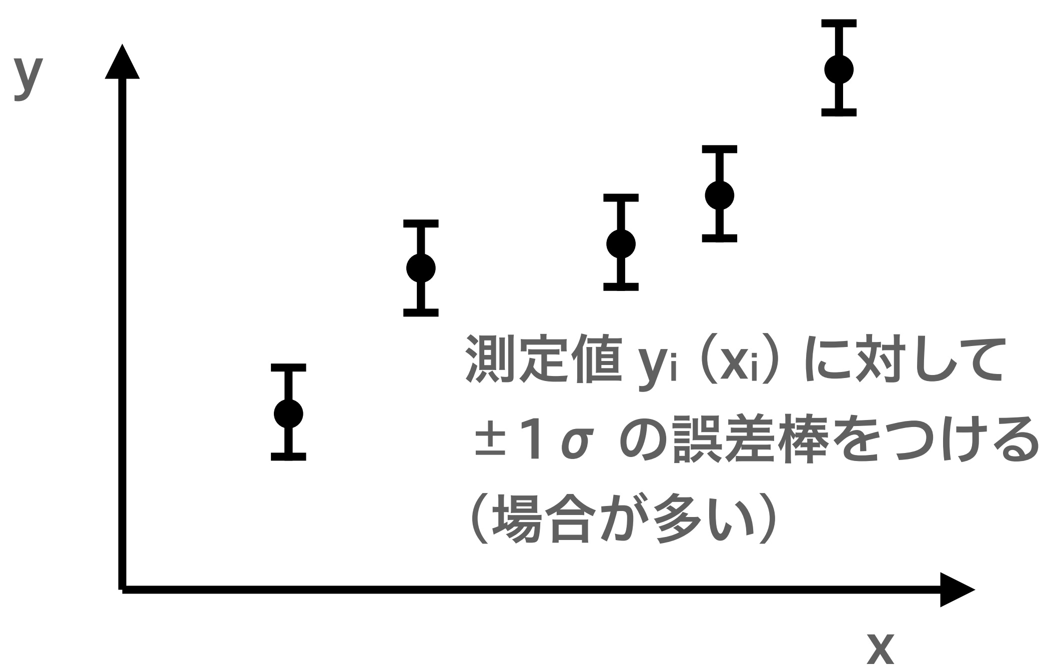
再びサイコロの例（n 回の平均値の 10000 回の分布）

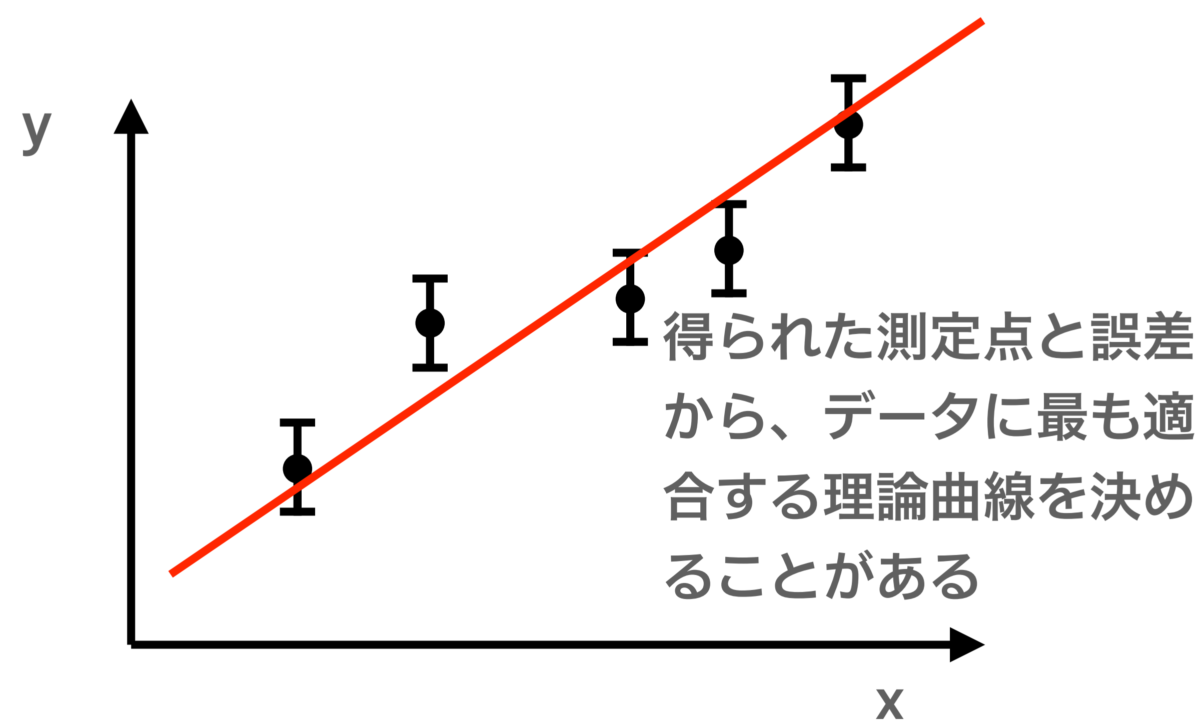


測定値の誤差

- 我々は、多くの場合に「真の値」を知らない
- 物理量の測定は、様々なランダムな**確率過程**を経る場合が多い
- 測定値の誤差が正規分布になる・近似できる場合が頻繁に現れる
  - 多数の電子の流れである電流値の測定
  - 放射線の検出回数（少数の場合はポアソン分布）
  - 光電子増倍管で検出した光子の個数

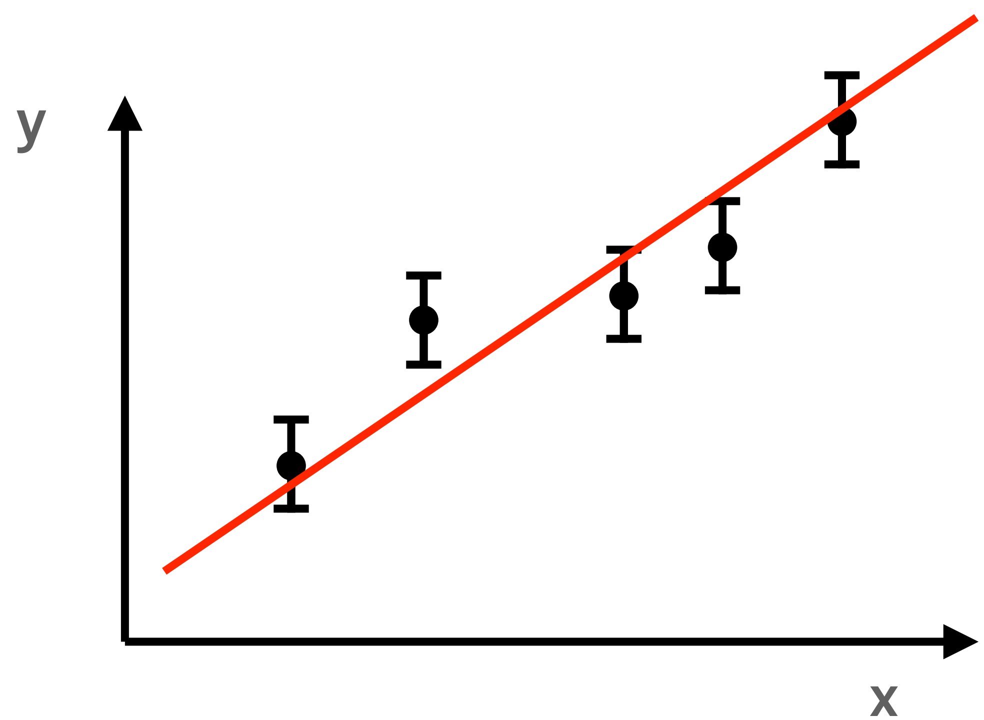






最尤法（さいゆうほう） (Maximum Likelihood)

- 最も「尤もらしい」理論曲線を決定するやり方
- 簡単のため、測定点 $y_i(x_i)$ の誤差が正規分布（μ_i、σ_i）に従うとする（一般的には好きな確率密度分布）



$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - f(x_i))^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

ある理論曲線 f(x) を考えた場合、各 x_i に対して得られる測定値 y_i の組み合わせは、x_i における確率密度の積が大きいほど出やすいはずである

尤度 L を最大にする理論曲線が最も尤もらしい（一般的に手計算は困難）

尤度 L を最大にする

- L を最大にする → ln L を最大にすれば良い

$$\ln L = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - f(x_i))^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} - \frac{(y_i - f(x_i))^2}{2\sigma_i^2} \right]$$

$$= -\boxed{\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{2\sigma_i^2}} + \text{const}\,.$$

残差二乗和

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$

この項（$\chi^2/2$）を最小化すれば良い

最小二乗法

- さらに単純な場合を考える
  - x_i の誤差は無視する
  - 誤差の大きさが各点で等しく、その真の値は不明
  - 理論曲線が $f(x) = a + bx$ で表される

$$\begin{aligned}\ln L &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{2\sigma^2} + \text{const}\,. \\ &= -\chi^2/2 + \text{const}\,.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0$$

を満たさなくてはいけない（χ^2 の最小値を探す）

ここから板書…